

சுராவின் கணிதவியல்

11^{ஆம்} வகுப்பு

புதிய பாடத்திட்டம் மற்றும் புதிய பாடப்புத்தகத்தின்படி தயாரிக்கப்பட்டது

தொகுதி - I & II

சிறப்பம்சங்கள்

- ✦ பாட நூலில் உள்ள பயிற்சி வினாக்களுக்கு முழுமையான, எளிமையான தீர்வுகள்.
- ✦ அரசு மாதிரி வினாத்தாள் - 2018 [அ.மா.வி - 2018], முதல் பருவ இடைத்தேர்வு [First Mid-2018], காலாண்டுத் தேர்வு [Qy. 2018 & 19], அரையாண்டுத் தேர்வு [Hy - 2018 & 19], மார்ச் 2019 மற்றும் ஜூன் 2019 சேர்க்கப்பட்டுள்ளன.
- ✦ அரசு மாதிரி வினாத்தாள்-2019 வினாத்தாள் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.
- ✦ காலாண்டு பொதுத்தேர்வு - 2019 வினாத்தாள் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.
- ✦ அரையாண்டு பொதுத்தேர்வு - 2019 வினாத்தாள் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.
- ✦ பொதுத்தேர்வு மார்ச் - 2020 வினாத்தாள் விடைகளுடன் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.



சுரா பப்ளிகேஷன்ஸ்

சென்னை

பொருளடக்கம்

தொகுதி - I

அத்தியாயம்	பாடத் தலைப்புகள்	பக்க எண்
1.	கணங்கள், தொடர்புகள் மற்றும் சார்புகள்	1-28
2.	அடிப்படை இயற்கணிதம்	29-54
3.	முக்கோணவியல்	55-104
4.	சேர்ப்பியல் மற்றும் கணிதத் தொகுத்தறிதல்	105 -136
5.	ஈருறுப்புத் தேற்றம், தொடர்முறைகள் மற்றும் தொடர்கள்	137 -156
6.	இரு பரிமாண பகுமுறை வடிவியல்	157 - 190

தொகுதி - II

அத்தியாயம்	பாடத் தலைப்புகள்	பக்க எண்
7.	அணிகளும் அணிக்கோவைகளும்	191 - 219
8.	வெக்டர் இயற்கணிதம் - I	220 - 245
9.	வகை நுண்கணிதம் எல்லைகள் மற்றும் தொடர்ச்சித் தன்மை	246 - 274
10.	வகை நுண்கணிதம் வகைமை மற்றும் வகையிடல் முறைகள்	275 - 298
11.	தொகை நுண்கணிதம்	299 - 328
12.	நிகழ்தகவு கோட்பாடு - ஓர் அறிமுகம்	329 - 344
	அரசு மாதிரி வினாத்தாள்	345 - 347
	காலாண்டு பொதுத்தேர்வு - 2019	348 - 350
	அரையாண்டு பொதுத்தேர்வு - 2019	351 - 353
	பொதுத்தேர்வு மார்ச் - 2020 வினாத்தாள் விடைகளுடன்	354 - 362

தொகுதி - I

கணிதவியல்

11^{ஆம்} வகுப்பு

01

கணங்கள், தொடர்புகள் மற்றும் சார்புகள்

புத்தக வினாக்கள்

பயிற்சி 1.1

1. கீழ்க்காண்பவைகளை பட்டியல் முறையில் எழுதுக.

- $\{x \in \mathbb{N} : x^2 < 121 \text{ மற்றும் } x \text{ ஒரு பகா எண்ணாகும்}\}$
- $(x-1)(x+1)(x^2-1)=0$ எனும் சமன்பாட்டின் மிகை மூலங்களின் கணம்.
- $\{x \in \mathbb{N} : 4x + 9 < 52\}$
- $\{x : \frac{x-4}{x+2} = 3, x \in \mathbb{R} - \{-2\}\}$

தீர்வு :

- $A = \{x \in \mathbb{N}, x^2 < 121 \text{ மற்றும் } x \text{ ஒரு பகா எண்}\}$ என்க.
 $A = \{2, 3, 5, 7\}$.
- $B = \{(x-1), (x+1), (x^2-1)=0 \text{ எனும் சமன்பாட்டின் மிகை மூலங்களின் கணம்}\}$ என்க.
 $\Rightarrow x = 1, -1 \therefore B = \{1\}$.
- $C = \{x \in \mathbb{N}, 4x + 9 < 52\}$ என்க.
 $\Rightarrow C = \{x \in \mathbb{N}, 4x < 52 - 9\}$
 $\Rightarrow C = \{x \in \mathbb{N}, 4x < 43\}$
 $\Rightarrow C = \left\{x \in \mathbb{N}, x < \frac{43}{4}\right\}$
 $\Rightarrow C = \{x \in \mathbb{N}, x = 10.75\}$
 $\Rightarrow C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$.
- $D = \left\{x, \frac{x-4}{x+2} = 3, x \in \mathbb{R} - \{-2\}\right\}$ என்க
 $\Rightarrow D = \{x : x - 4 = 3x + 6, x \in \mathbb{R}\}$
 $\Rightarrow D = \{x : -4 - 6 = 3x - x, x \in \mathbb{R}\}$
 $\Rightarrow D = \{x : -10 = 2x, x \in \mathbb{R}\}$
 $\Rightarrow D = \{x : x = -5, x \in \mathbb{R}\} \Rightarrow D = \{-5\}$.

2. $\{-1, 1\}$ எனும் கணத்தைக் கணக் கட்டமைப்பு முறையில் எழுதுக.

தீர்வு : $P = \{-1, 1\}$ என்க
 $\Rightarrow P = \{x \in \mathbb{R} : x \text{ என்பது } x^2 - 1 = 0 \text{ -ன் தீர்வு}\}$.

3. கீழ்க்காண்பவற்றுள் எவை முடிவுள்ள கணம், முடிவில்லாத கணம் என்பதனைக் குறிப்பிடுக.

- $\{x \in \mathbb{N} : x \text{ என்பது ஒரு இரட்டைப் படை பகா எண்}\}$.
- $\{x \in \mathbb{N} : x \text{ என்பது ஒரு ஒற்றைப்படை பகா எண்}\}$.
- $\{x \in \mathbb{Z} : x \text{ என்பது பத்தை விடக் குறைந்த இரட்டைப் படை எண்}\}$.
- $\{x \in \mathbb{R} : x \text{ என்பது ஒரு விகிதமுறு எண்}\}$.
- $\{x \in \mathbb{N} : x \text{ என்பது ஒரு விகிதமுறு எண்}\}$.

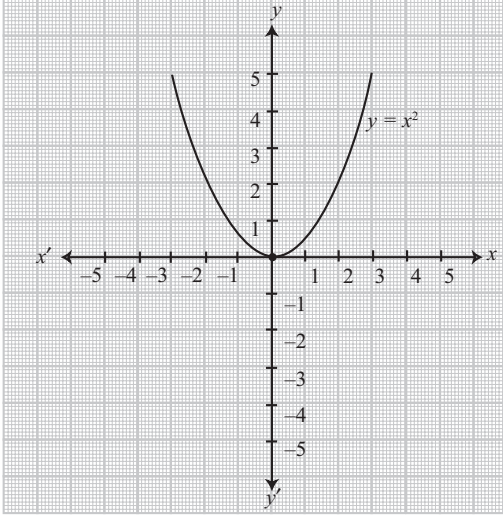
தீர்வு :

- $A = \{x \in \mathbb{N}, x \text{ என்பது ஒரு இரட்டைப் படை பகா எண்}\}$ என்க,
 $\Rightarrow A = \{2\} \Rightarrow A$ ஒரு முடிவுறு கணம்.
- $B = \{x \in \mathbb{N}, x \text{ என்பது ஒரு ஒற்றைப் படை பகா எண்}\}$ என்க.
 $\Rightarrow B = \{3, 5, 7, 11, \dots\}$ ஒரு முடிவுறு கணம்.
- $C = \{x \in \mathbb{Z}, x \text{ என்பது பத்தை விடக் குறைந்த இரட்டைப்படை எண்}\}$ என்க.
 $\Rightarrow C = \{-\infty \dots -4, -2, 2, 4, 6, 8\}$ முடிவுறு கணம்.
- $D = \{x \in \mathbb{R}, \text{ என்பது ஒரு விகித முறு எண்}\}$ என்க.
 $\Rightarrow D = \{\text{விகித முறு எண்களின் கணம்}\}$ ஒரு முடிவுறு கணம்.
- $E = \{x \in \mathbb{N} : x \text{ ஒரு விகித முறு எண்}\}$
 $\Rightarrow E = \left\{\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{3}{1}, \frac{4}{1}, \dots\right\}$
 $\Rightarrow E$ ஒரு முடிவுறு கணம்.

4. $y = x^2$ என்ற வளைவரையிலிருந்து $y = 3(x - 1)^2 + 5$ என்ற வளைவரையை காணும் படிநிலைகளை எழுதுக.

தீர்வு : படி 1

$y = x^2$ யின் வரைபடம் வரைக.



படி 2 : $y = (x - 1)^2$ ஓரலகு வலது புறத்தில் நகர்த்தப்பட்டு வரையப்படுகிறது.

படி 3 : $y = 3(x - 1)^2$ -ன் வரைபடம் y -அச்சை நோக்கி அழுத்தப்பட்டு அதாவது x அச்சிலிருந்து விலகுவதால் வரையப்படுகிறது. ஏனென்றால் $(x - 1)^2$ ஆனது 3 ஆல் பெருக்கப்பட்டு பெறப்படுகிறது. $3 > 1$

படி 4 : $y = 3(x - 1)^2 + 5$ -ன் வரைபடம் 5 அலகுகள் மேல்நோக்கி நகர்வதால் பெறப்படுகிறது.

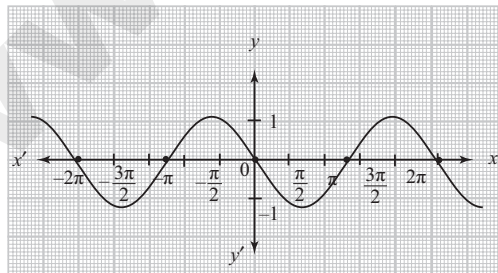
5. $y = \sin x$ என்ற சார்பினை வரைந்து அதன் மூலம்

- (i) $y = \sin(-x)$ (ii) $y = -\sin(-x)$
(iii) $y = \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$ (iv) $y = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

ஆகியவற்றை வரைக. (இங்கு (iii), (iv), என்பவை $\cos x$ என்பது முக்கோணவியல் மூலம் தெரிந்து கொள்ளலாம்).

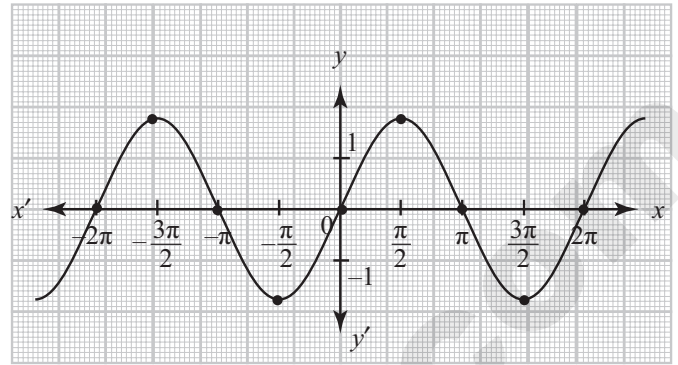
தீர்வு :

- (i) $y = \sin(-x)$



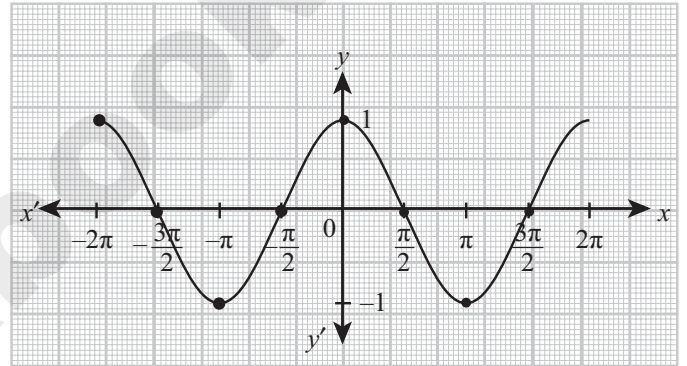
$y = -\sin x$ -ன் வரைபடம் $y = \sin x$ - வரைபடத்தின் y - அச்சை பொறுத்த பிரதிபலிப்பு வரைபடமாகும்.

- (ii) $y = -\sin(-x)$



$y = -\sin(-x)$ -ன் வரைபடம் x அச்சைப் பொறுத்து $\sin(-x)$ ன் பிரதிபலிப்பு வரைபடமாகும்.

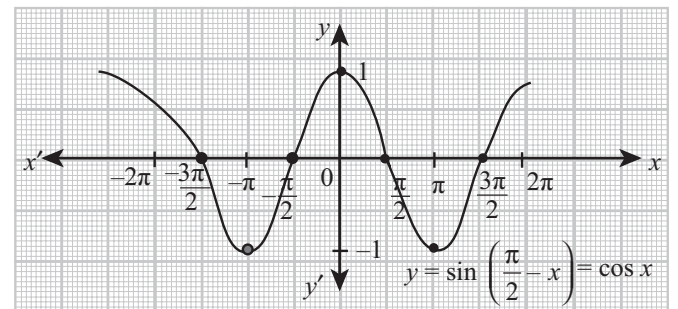
- (iii) $y = \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$



$y = \sin x$

$\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$ -ன் வரைபடம் $\sin x$ வரைபடத்தை $\frac{\pi}{2}$ அலகுகள் இடப்பக்க நகர்வினால் பெறப்படுகிறது.

- (iv) $y = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$



$y = \sin x$

$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ -ன் வரைபடம் $\sin(-x)$ -ன் வரைபடத்தை $\frac{\pi}{2}$ அலகுகள் வலப்பக்க நகர்வினால் பெறப்படுகிறது.

02

அடிப்படை இயற்கணிதம்

புத்தக வினாக்கள்

பயிற்சி 2.1

1. $\left\{\sqrt{7}, \frac{-1}{4}, 0, 3.14, 4, \frac{22}{7}\right\}$ ஆகிய ஒவ்வொரு

எண்ணினையும் $\mathbb{N}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}-\mathbb{Q}$ அல்லது $\mathbb{Z}$ என்ற அடிப்படையில் எழுதுக.

தீர்வு : $\sqrt{7}$ விகிதமுறா எண், $\sqrt{7} \in \mathbb{R}-\mathbb{Q}$.

$\frac{-1}{4}$ குறை விகிதமுறு எண், $\frac{-1}{4} \in \mathbb{Q}$

0 ஒரு முழு, $0 \in \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$

$3.14 = \pi$ முடிவற்ற கழல் தன்மையற்ற தசம பின்னம்

$\Rightarrow 3.14 \in \mathbb{Q}$

4 ஒரு மிகை முழு $\Rightarrow 4 \in \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$.

$\frac{22}{7}$ ஒரு விகிதமுறா எண் $\Rightarrow \frac{22}{7} \in \mathbb{Q}$

2. $\sqrt{3}$ ஒரு விகிதமுறா எண் எனக் காட்டுக. (குறிப்பு $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ -க்குப் பயன்படுத்திய முறையை பின்பற்றவும்.)

[First Mid - 2018]

தீர்வு : $\sqrt{3}$ ஒரு விகிதமுறுஎண் என்க.

$\therefore \sqrt{3} = \frac{m}{n}$ என்க (m, n என்பன 1 ஐத் தவிர

பொதுவகுத்தி இல்லாதவை)

இருபுறமும் வர்க்கப்படுத்த

$$3 = \frac{m^2}{n^2} \Rightarrow 3n^2 = m^2$$

$$\Rightarrow 3n^2 = m^2$$

2 ஆல் இருபுறமும் பெருக்குக

$$\Rightarrow 6n^2 = 2m^2 \Rightarrow 3(2n^2) = 2m^2$$

$2n^2$ ஆனது 2-ஆல் வகுபடும் m^2 -ம் ஒரு இரட்டை எண்

$\Rightarrow m$ ஒரு இரட்டையாக இருக்க வேண்டும்

$$\Rightarrow m = 2k, k \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow 3n^2 = (2k)^2 \Rightarrow 3n^2 = 4k^2$$

n ஒரு இரட்டை எண். எனவே, m, n இரட்டை எண்கள் 2-ன் காரணிகள் ஆகும். இது முதல் கூற்றை மூரண்பாடுடையதாக்குகிறது.

$\therefore \sqrt{3}$ ஒரு விகிதமுறு எண்ணாக இருக்க இயலாது.

$\Rightarrow \sqrt{3}$ ஒரு விகிதமுறா எண்ணாகும்.

எனவே நிரூபிக்கப்பட்டது.

3. தனித்த (அ) நன்கு வரையறுக்கப்பட்ட இரண்டு விகிதமுறா எண்கள் உள்ளனவா எனில், அவ்விரு விகிதமுறா எண்களின் வித்தியாசம் ஒரு விகிதமுறு எண்ணாக இருக்க முடியுமா? நியாயப்படுத்துக.

தீர்வு : இரண்டு வெவ்வேறான விகிதமுறா எண்கள் $(2 + \sqrt{3}), (4 + \sqrt{3})$ என்க.

$$\text{அவற்றின் வித்தியாசம் } (2 + \sqrt{3}) - (4 + \sqrt{3})$$

$$= 2 + \sqrt{3} - 4 - \sqrt{3}$$

$$= 2 - 4 = -2 \text{ இது ஒரு விகிதமுறு எண்ணாகும்.}$$

4. இருவிகிதமுறா எண்களின் கூடுதல் விகிதமுறு எண்ணாக அமையுமாறு விகிதமுறா எண்களைக் காண்க. இரு விகிதமுறா எண்களின் பெருக்கல் விகிதமுறு எண்ணாக அமையுமாறு இரண்டு விகிதமுறா எண்களைக் காணமுடியுமா?

தீர்வு : இரண்டு விகிதமுறா எண்கள் $5 + \sqrt{7}, 7 - \sqrt{7}$ என்க.

அவற்றின் கூடுதல் $= 5 + \sqrt{7} + 7 - \sqrt{7} = 12$ இது ஒரு விகிதமுறு எண்

$4 + \sqrt{6}, 4 - \sqrt{6}$ என்ற இரு விகிதமுறா எண்களை எடுத்துக்கொள்வோம்.

$$\text{அவற்றின் பெருக்கற்பலன் } (4 + \sqrt{6})(4 - \sqrt{6})$$

$$= 4^2 - (\sqrt{6})^2 = 16 - 6 = 10 \text{ இது ஒரு விகிதமுறு எண்}$$

$$\begin{aligned} x &= -3 \text{ என } (2) \text{ -ல் பிரதியிட} \\ -8 &= A(-4) \Rightarrow A = 2 \\ \therefore \frac{x-5}{x^2+2x-3} &= \frac{2}{x+3} - \frac{1}{x-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{இதை (1) -ல் பிரதியிட} \\ \Rightarrow \frac{2x^2+5x-11}{x^2+2x-3} &= 2 + \frac{2}{x+3} - \frac{1}{x-1} \end{aligned}$$

$$12. \frac{7+x}{(1+x)(1+x^2)}$$

$$\begin{aligned} \text{தீர்வு: } \frac{7+x}{(1+x)(1+x^2)} &= \frac{A}{1+x} + \frac{Bx+C}{x^2+1} \\ \Rightarrow x+7 &= A(x^2+1) + (Bx+C)(x+1) \end{aligned}$$

$$x = -1 \text{ என } (1) \text{ -ல் பிரதியிட}$$

$$6 = A(2) \Rightarrow A = 3$$

x^2 -ன் கெழுக்களை இருபுறமும் சமப்படுத்த

$$0 = A+B \Rightarrow B = -3$$

$$x = 0 \text{ என } 1 \text{ -ல் பிரதியிட}$$

$$7 = A+C \Rightarrow C = 4$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{7+x}{(1+x)(1+x^2)} &= \frac{3}{1+x} + \frac{-3x+4}{x^2+1} \\ &= \frac{3}{1+x} + \frac{-3x+4}{x^2+1} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{7+x}{(1+x)(1+x^2)} = \frac{3}{1+x} - \frac{4-3x}{x^2+1}$$

பயிற்சி 2.10

கீழே கொடுக்கப்பட்ட அசமன்பாடுகள் குறிக்கும் பகுதியைக் காண்க.

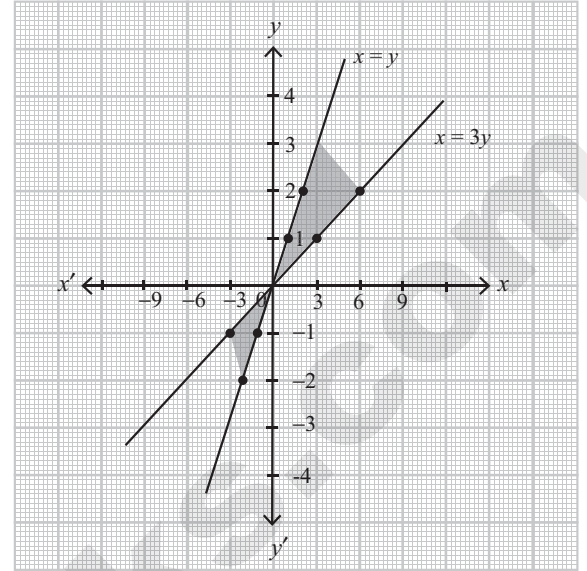
1. $x \leq 3y, x \geq y$

தீர்வு: $x = 3y \Rightarrow \frac{x}{3} = y$

x	0	3	6	-3
y	0	1	2	-1

$x = y$ எனில்

x	1	2	-1	-2
y	1	2	-1	-2



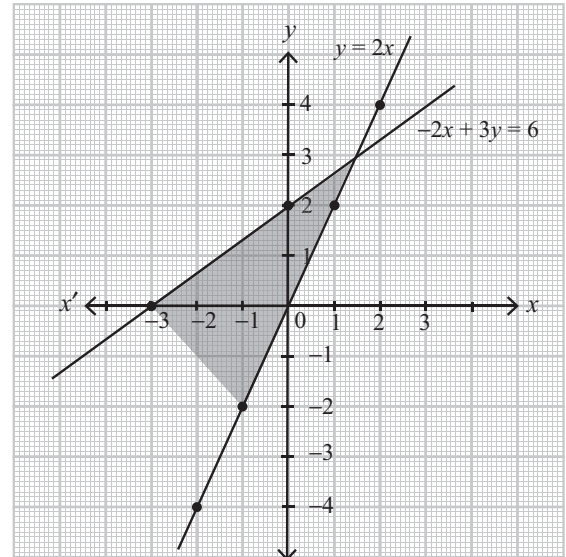
2. $y \geq 2x, -2x + 3y \leq 6$

தீர்வு: $y = 2x$

x	1	-1	2	-2
y	2	-2	4	-4

$$-2x + 3y = 6 \Rightarrow -2x = 6 - 3y \Rightarrow x = \frac{6-3y}{(-2)}$$

x	0	-3
y	2	0



03

முக்கோணவியல்

புத்தக வினாக்கள்

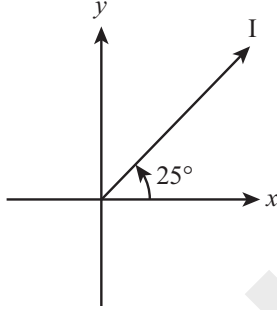
பயிற்சி 3.1

1. கொடுக்கப்பட்ட கோணங்கள் எந்தக் காற்பகுதியில் அமையும் என்பதைக் காண்க.

- (i) 25° (ii) 825° (iii) -55° (iv) 328°
(v) -230°

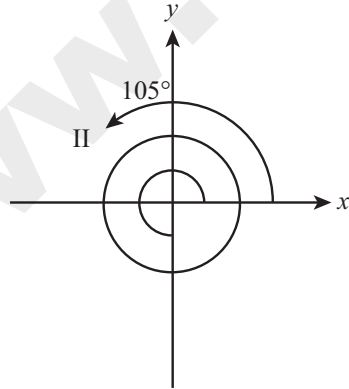
தீர்வு :

- (i) $25^\circ =$ முதல் காற்பகுதியில் அமையும்.

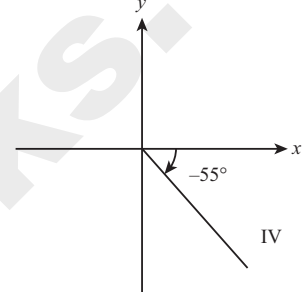


- (ii) 825°

$825^\circ = 2 \times 360^\circ + 105^\circ = (2 \times 360^\circ) + (90^\circ + 15^\circ) =$ இரண்டாம் காற்பகுதியில் அமையும்.

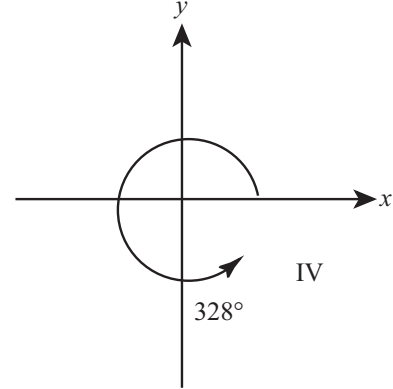


- (iii) $-55^\circ =$ நான்காம் காற்பகுதியில் அமையும்.



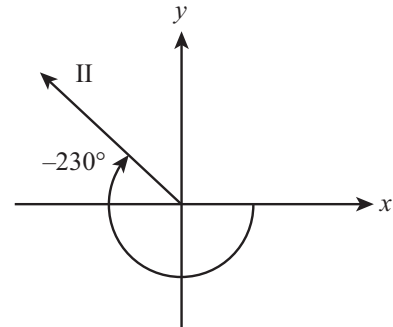
- (iv) 328°

$328^\circ = 270^\circ + 58^\circ =$ நான்காம் காற்பகுதியில் அமையும்.



- (v) -230°

$-230^\circ = -180^\circ + (-50^\circ) =$ இரண்டாம் காற்பகுதியில் அமையும்.



$$\therefore \theta\text{-ன் தீர்வு} = \left(2n\pi + \frac{\pi}{3}\right), (2n+1)\pi, n \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{aligned} \text{(ix)} \quad & \tan \theta + \tan\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) + \tan\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) = \sqrt{3} \\ \Rightarrow & \tan \theta + \frac{\tan \theta + \tan \frac{\pi}{3}}{1 - \tan \theta \cdot \tan \frac{\pi}{3}} + \frac{\tan \theta + \tan \frac{2\pi}{3}}{1 - \tan \theta \cdot \tan \frac{2\pi}{3}} = \sqrt{3} \\ \Rightarrow & \tan \theta + \frac{\tan \theta + \sqrt{3}}{1 - \sqrt{3} \tan \theta} + \frac{\tan \theta - \sqrt{3}}{1 + \sqrt{3} \tan \theta} = \sqrt{3} \\ \Rightarrow & \tan \theta + \frac{(1 + \sqrt{3} \tan \theta)(\tan \theta + \sqrt{3}) + (1 - \sqrt{3} \tan \theta)(\tan \theta - \sqrt{3})}{1 - 3 \tan^2 \theta} = \sqrt{3} \\ \Rightarrow & \tan \theta + \frac{\tan \theta + \sqrt{3} + \sqrt{3} \tan^2 \theta + 3 \tan \theta + \tan \theta - \sqrt{3} \tan^2 \theta - \sqrt{3} + 3 \tan \theta}{1 - 3 \tan^2 \theta} = \sqrt{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow & \tan \theta + \frac{8 \tan \theta}{1 - 3 \tan^2 \theta} = \sqrt{3} \\ \Rightarrow & \tan \theta + \frac{8 \tan \theta}{1 - 3 \tan^2 \theta} = \sqrt{3} \\ \Rightarrow & \frac{\tan \theta - 3 \tan^3 \theta + 8 \tan \theta}{1 - 3 \tan^2 \theta} = \sqrt{3} \\ \Rightarrow & \frac{3(3 \tan \theta - \tan^3 \theta)}{1 - 3 \tan^2 \theta} = \sqrt{3} \\ \Rightarrow & 3(\tan 3\theta) = \sqrt{3} \\ \Rightarrow & \tan 3\theta = \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \Rightarrow & \tan 3\theta = \tan \frac{\pi}{6} \\ \Rightarrow & 3\theta = \frac{\pi}{6}, n \in \mathbb{Z} \\ \Rightarrow & (\therefore \tan \theta = \tan \alpha \Rightarrow \theta = n\pi + \alpha) \\ \Rightarrow & \theta = \frac{n\pi}{3} + \frac{\pi}{18}, n \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

$$\text{(x)} \quad \cos 2\theta = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$$

$$\cos 2\theta = \frac{\sqrt{5}+1}{4} = \cos 36^\circ$$

$$\left(\because \cos 36^\circ = \frac{\sqrt{5}+1}{4}\right)$$

$$36^\circ = 36 \times \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{5}$$

$$\Rightarrow \cos 2\theta = \cos \frac{\pi}{5}$$

$$\Rightarrow 2\theta = 2n\pi \pm \frac{\pi}{5}, n \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow \theta = n\pi \pm \frac{\pi}{10}, n \in \mathbb{Z}$$

$$\text{(xi)} \quad 2 \cos^2 x - 7 \cos x + 3 = 0$$

$$(\cos x - 3)(2 \cos x - 1) = 0$$

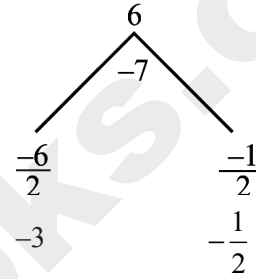
$$\Rightarrow (\cos x - 3) = 0$$

$$\Rightarrow \cos x = 3$$

$$\Rightarrow \text{அல்லது } (2 \cos x - 1) = 0$$

$$\Rightarrow \cos x = \frac{1}{2}$$

$\cos x = 3$ -ஆக இருக்க முடியாது



$$\therefore \cos x = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \cos x = \cos \frac{\pi}{3}$$

$$\Rightarrow x = 2n\pi \pm \frac{\pi}{3}, n \in \mathbb{Z}$$

$$\therefore x\text{-ன் தீர்வு} = 2n\pi \pm \frac{\pi}{3}, n \in \mathbb{Z}$$

பயிற்சி 3.9

$$1. \quad \triangle ABC \text{ இல் } \frac{\sin A}{\sin C} = \frac{\sin(A-B)}{\sin(B-C)} \text{ எனில், } a^2, b^2, c^2$$

ஆகியவை ஒரு கூட்டுத் தொடர் வரிசையில் அமையும் என நிறுவுக.

$$\text{தீர்வு : } \sin \text{ சூத்திரம் } \frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c} = k$$

$$= \sin A = ak, \sin B = bk, \sin C = ck \quad \dots(1)$$

$$= \frac{\sin A}{\sin C} = \frac{\sin(A-B)}{\sin(B-C)}$$

என கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

$$(\therefore \sin A = \sin(B+C) \sin C = \sin(A+B))$$

$$\Rightarrow \frac{\sin(B+C)}{\sin(A+B)} = \frac{\sin(A-B)}{\sin(B-C)}$$

$$\Rightarrow \sin(B+C) \sin(B-C) = \sin(A+B) \sin(A-B)$$

$$\Rightarrow \sin^2 B - \sin^2 C = \sin^2 A - \sin^2 B$$

20. ΔABC இல்

[Hy - 2018]

(i) $\sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} > 0$

(ii) $\sin A \sin B \sin C > 0$

(1) (i) மற்றும் (ii) ஆகிய இரண்டும் உண்மை

(2) (i) மட்டுமே உண்மை

(3) (ii) மட்டுமே உண்மை

(4) (i) மற்றும் (ii) ஆகிய இரண்டும் உண்மையில்லை

குறிப்பு : ΔABC -ல் $\sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} > 0$ மேலும் $\sin A \sin B$

$\sin C > 0$. இரண்டும் சரி. I மற்றும் II காற்பகுதியில்.

[விடை : (1) (i) மற்றும் (ii) ஆகிய இரண்டும் உண்மை]

அரசு தேர்வு வினா - விடை

I மதிப்பெண்

சரியான அல்லது மிகவும் ஏற்புடைய விடையினைத் தேர்ந்தெடுக்கவும்.

1. ΔABC மில் $\tan \left(\frac{A}{2} \right)$

[Qy - 2019]

(1) $\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}$

(2) $\sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}$

(3) $\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}$

(4) $\sqrt{\frac{s(s-a)(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}$

[விடை : (3) $\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}$]

2. $\frac{\cos 3\theta}{2\cos 2\theta - 1} = \frac{1}{2}$ எனில் θ -ன் மதிப்பு [Qy - 2019]

(1) $\theta = n\pi + \frac{\pi}{3}$

(2) $\theta = 2n\pi + \frac{\pi}{3}$

(3) $\theta = 2n\pi \pm \frac{\pi}{6}$

(4) $\theta = n\pi \pm \frac{\pi}{6}$

[விடை : (2) $\theta = 2n\pi + \frac{\pi}{3}$]

3. $1 + \cos(x-y) = 0$ எனில், [Qy - 2019]

(1) $\cos x - \cos y = 0$

(2) $\cos x + \cos y = 0$

(3) $\cos x + \sin y = 0$

(4) $\cos x + \cos y = 0$

[விடை : (2) $\cos x + \cos y = 0$]

4. $\cos 1^\circ + \cos 2^\circ + \cos 3^\circ + \dots + \cos 179^\circ =$ [Qy - 2018]

(1) 0

(2) 1

(3) -1

(4) 89

குறிப்பு : $= (\cos 1^\circ + \cos 179^\circ) + (\cos 2^\circ + \cos 178^\circ) + (\cos 3^\circ + \cos 177^\circ) + \dots$
 $= 2 \cos 90^\circ \cos 89^\circ + 2 \cos 90^\circ \cos 88^\circ + \dots$
 $= 0 + 0 + \dots = 0$ [விடை : (1) 0]

5. $\sec \theta = x + \frac{1}{4x}$, எனில், $\sec \theta + \tan \theta =$ [Qy - 2018]

(1) $x, \frac{1}{x}$

(2) $2x, \frac{1}{x}$

(3) $-2x, \frac{1}{2x}$

(4) $-x, \frac{1}{x}, x$

குறிப்பு :

$\sec \theta = x + \frac{1}{4x} \dots (1)$

$\tan^2 \theta = \sec^2 \theta - 1$

$\tan^2 \theta = \left(x + \frac{1}{4x} \right)^2 - 1$

(1) லிருந்து

$\tan^2 \theta = x^2 + \frac{1}{16x^2} + \frac{1}{2} - 1$

$= x^2 + \frac{1}{16x^2} - \frac{1}{2}$

$\tan^2 \theta = \left(x - \frac{1}{4x} \right)^2$

$\tan \theta = \pm \left(x - \frac{1}{4x} \right)$

$\tan \theta = \frac{1}{4x}$ எனில்

$\sec \theta + \tan \theta = x + \frac{1}{4x} + x - \frac{1}{4x} = 2x$

$\tan \theta = -\left(x - \frac{1}{4x} \right)$ எனில்

$\sec \theta + \tan \theta = x + \frac{1}{4x} - x + \frac{1}{4x} = \frac{1}{2x}$

[விடை : (2) $2x, \frac{1}{x}$]

6. $\sin \left(\cos^{-1} \frac{5}{13} \right)$ -ன் மதிப்பு [Hy - 2018]

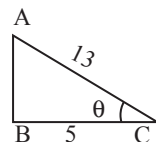
(1) $\frac{12}{13}$

(2) $\frac{5}{13}$

(3) $\frac{5}{12}$

(4) 1

குறிப்பு : $AB = \sqrt{13^2 - 5^2} = \sqrt{169 - 25} = \sqrt{144} = 12$



[விடை : (1) $\frac{12}{13}$]

7. $\frac{\sin 10^\circ - \cos 10^\circ}{\cos 10^\circ + \sin 10^\circ}$ -ன் மதிப்பு [அ.மா.வி & Hy - 2018]

(1) $\tan 35^\circ$

(2) $\sqrt{3}$

(3) $\tan 75^\circ$

(4) 1

04

சேர்ப்பியல் மற்றும் கணிதத் தொகுத்தறிதல்

புத்தக வினாக்கள்

பயிற்சி 4.1

1. (i) ஒருவர் இரவு விருந்திற்காக ஒரு உணவு விடுதிக்கு சென்றார். அங்கிருந்த உணவு பட்டியலில் 10 இந்திய மற்றும் 7 சீன உணவு வகைகள் இருந்தன. ஒரு இந்திய அல்லது ஒரு சீன உணவை அவர் எத்தனை வகைகளில் தேர்ந்தெடுக்க முடியும்?
- (ii) ஓர் கடையில் 3 விதிமான மகிழுந்து பொம்மைகளும், 2 விதிமான தொடர் வண்டி பொம்மைகளும் உள்ளன. ஒரு குழந்தை ஒரு மகிழுந்து பொம்மையையும் மற்றும் ஒரு தொடர் வண்டி பொம்மையையும் எத்தனை வழிகளில் தேர்ந்தெடுக்கலாம்?
- (iii) 1, 2, 3, 4, 5 என்ற இலக்கங்களை திரும்ப வராத முறையில் பயன்படுத்தி எத்தனை இரண்டு – இலக்க எண்களை உருவாக்கலாம்?
- (iv) 10 இருக்கைகள் உள்ள அரங்கில் மூன்று நபர்கள் நுழைகிறார்கள். எத்தனை வழிகளில் அவர்கள் அந்த இருக்கையில் அமரலாம்?
- (v) 5 நபர்களை ஒரு வரிசையில் எத்தனை வழிகளில் அமர வைக்கலாம்?

தீர்வு :

- (i) ஒருவர் 10 இந்திய உணவை 10 வழியிலும் 7 சீன உணவை 7 வழியிலும் தேர்வு செய்ய முடியும்.
∴ கூட்டுதலின் அடிப்படைக் கொள்கையின்படி 10 இந்தியன் மற்றும் 7 சீன உணவை $(10 + 7) = 17$ வழிகளில் தேர்வு செய்யலாம்.
- (ii) 3 விதிமான மகிழுந்து பொம்மைகளை = 3 வழிகளில் வாங்கலாம்.
2 விதிமான தொடர்வண்டி பொம்மைகளை = 2 வழிகளில் வாங்கலாம்.
பெருக்கலின் அடிப்படைக்கொள்கையின்படி
= $(3 \times 2) = 6$ வழிகளில் வாங்கலாம்.

(iii)	பத்துகள்	ஒன்றுகள்
	4	5

ஒன்றாவது இடத்தை 1,2,3,4,5 என்ற எண்களைப் பயன்படுத்தி 5 வழிகளில் நிரப்பலாம்.

பத்தாவது இடத்தை 4 வழிகளில் நிரப்பலாம்.

∴ இரண்டு இலக்க எண்களை (எந்த எண்ணும் திரும்ப வராத முறையில் $4 \times 5 = 20$ வழிகளில் நிரப்பலாம்.

- (iv) முதல் மனிதர் ஒரு இருக்கையில் = 10 வழிகளில் அமரலாம்

இரண்டாவது மனிதர் ஒரு இருக்கையில் = 9 வழிகளில் அமரலாம்

மூன்றாவது மனிதர் ஒரு இருக்கையில் = 8 வழிகளில் அமரலாம்.

∴ பெருக்கலின் அடிப்படைக் கொள்கையின்படி மூன்று மனிதர்கள் = $10 \times 9 \times 8 = 720$ வழிகளில் அமரலாம்.

- (v) 5 நபர்களை அமர வைக்க 5 இருக்கைகள் தேவை

முதல் நபரை அமர வைக்க = 5 வழிகள்

2 வது நபரை அமர வைக்க = 4 வழிகள்

3 வது நபரை அமர வைக்க = 3 வழிகள்

4 வது நபரை அமர வைக்க = 2 வழிகள்

5 வது நபரை அமர வைக்க = 1 வழி

∴ 5 நபர்களையும் அமரவைக்க = $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$
பெருக்கலின் அடிப்படைக்கொள்கையின்படி = 120 வழிகள் கிடைக்கும்

2. (i) ஒரு அலைபேசியில் 6 வெவ்வேறான இலக்கங்களைக் கொண்ட கடவுச் சொல் உள்ளது. அந்த கடவுச்சொல்லை மீட்டெடுக்க அதிக பட்சம் எத்தனை முயற்சிகளை செய்ய வேண்டும்?

NGH யை முதலில் வைத்து எழுதப்படும் சொற்களின் எண்ணிக்கை = $2! = 2$
 NGHI யை முதலில் வைத்து எழுதப்படும் சொற்களின் எண்ணிக்கை = $1! = 1$
 NGHIT யை முதலில் வைத்து எழுதப்படும் சொற்களின் எண்ணிக்கை = $1! = 1$
 $24 + 24 + 24 + 6 + 2 + 1 + 1 = 85$
 $\therefore 85$ வது எழுத்துச்சரம் = NIGHT

- 18. FUNNY என்ற வார்த்தையில் உள்ள எழுத்துகளை வரிசை மாற்றத்திற்கு உட்படுத்திக் கிடைக்கும் எழுத்துச் சரங்களை ஆங்கில அகராதியில் உள்ளது போன்று வரிசைப்படுத்தும்போது FUNNY என்ற வார்த்தையின் தரம் காண்க.**

தீர்வு : FUNNY-ல் உள்ள எழுத்துகள் = 5

ஆங்கில அகராதிப்படி எழுத என F,N,N,U,Y பெறலாம்
 N இருமுறை வந்துள்ளது

$\therefore$ F ஐ முதலில் கொண்டு எழுதப்படும் வார்த்தைகளின் எண்ணிக்கை = $3! = 6$

FUNNY ஐ முதலில் கொண்டு எழுதப்படும் வார்த்தைகளின் எண்ணிக்கை = $1! = 1$

$\therefore$ FUNNY என்ற வார்த்தையின் தரம் = $6 + 1 = 7$

- 19. 1, 2, 3, 4 மற்றும் 5 என்ற இலக்கங்கள் மீண்டும் திரும்ப வராத வகையில் உருவாகும் எல்லா 4-இலக்க எண்களின் கூட்டுத் தொகை காண்க.**

தீர்வு : 1,2,3,4,5 என்ற ஐந்து எண்களைக் கொண்டு நான்கு இலக்க எண்களை உருவாக்கும் வழிகள் = $5P_4 = 120$.

ஒன்றுக்கான இடத்தில் உள்ள எண்களின் கூடுதலைக் காண்போம்.

ஒன்றாம் இடத்தில் 1 வருமாறு அமையும் 4 இலக்க எண்கள் = $4P_3 = 24$

இதைப்போலவே மற்ற எண்கள் 2, 3, 4, 5 இவற்றை ஒன்றாம் இடத்தில் வருமாறு அமையும் எண்கள் 24 தடவைகள்

$\therefore$ 120 எண்களின் கூடுதல்

$$= (4P_3 \times 1) (4P_3 \times 2) (4P_3 \times 3) (4P_3 \times 4) (4P_3 \times 5)$$

$$= 4P_3 (1 + 2 + 3 + 4 + 5)$$

$$= 4P_3 15 = 24 \times 15 = 360$$

$$10\text{ம் இலக்கங்களின் கூடுதல்} = 3600$$

$$100\text{ம் இலக்கங்களின் கூடுதல்} = 36000$$

$$1000\text{ம் இலக்கங்களின் கூடுதல்} = 360000$$

$$\therefore \text{கிடைக்கும் 4 இலக்க எண்களின் கூடுதல்}$$

$$= 360 + 3600 + 36000 + 360000 = 399960$$

- 20. 0, 2, 5, 7, 8 என்ற இலக்கங்கள் மீண்டும் வராத வகையில் உருவாக்கப்படும் எல்லா 4-இலக்க எண்களின் கூட்டுத் தொகையை காண்க.**

தீர்வு :

ஆயிரம்	நூறு	பத்து	ஒன்று
4	4	3	2

கொடுக்கப்பட்ட நான்கு இலக்கங்கள் 0, 2, 5, 7, 8

4 இலக்க எண்களை அமைக்கும் வழிகள்
 $4 \times 4 \times 3 \times 2 = 96$.

மொத்தம் 96, இதில் 24 எண்கள் பூஜ்ஜியத்தில் முடியும்.

18 எண்கள் 2-ல் முடியும்

18 எண்கள் 5-ல் முடியும்

18 எண்கள் 7-ல் முடியும்

18 எண்கள் 8-ல் முடியும்

ஒன்றாம் இடத்திற்கான கூடுதல்

$$(24 \times 0) + (18 \times 2) + (18 \times 5) + (18 \times 7) + (18 \times 8)$$

$$= 18 (2 + 5 + 7 + 8) = 18 \times 22 = 396$$

$\therefore$ 4 இலக்கங்களின் கூடுதல்

$$= 396 + 3960 + 39600 + (24 \times 22) \times 1000 = 571956$$

பயிற்சி 4.3

- 1. ${}^nC_{12} = {}^nC_9$ எனில், ${}^{21}C_n$ ஐக் காண்க?**

தீர்வு : ${}^nC_x = {}^nC_y \Rightarrow x = y$ அல்லது $x + y = n$

$$\Rightarrow 12 + 9 = n$$

$$\Rightarrow n = 21$$

$$\Rightarrow {}^{21}C_n = {}^{21}C_{21} = 1 \quad [\because {}^nC_n = 1]$$

- 2. ${}^{15}C_{2r-1} = {}^{15}C_{2r+4}$ எனில், r ஐக் காண்க?**

தீர்வு : ${}^nC_x = {}^nC_y$
 ${}^{15}C_{2r-1} = {}^{15}C_{2r+4}$

என கொடுக்கப்பட்டுள்ளது

$${}^nC_x = {}^nC_y \Rightarrow x = y \text{ அல்லது}$$

$$x + y = n$$

$$\text{நமக்கு கிடைப்பது } 2r - 1 = 2r + 4r$$

$$1 \neq 4 \text{ ஆக இருக்க முடியாது (அல்லது)}$$

$$2r - 1 + 2r + 4 = 15$$

$$4r + 3 = 15 ; 4r = 12$$

$$\Rightarrow r = \frac{12}{4} = 3$$

$$\therefore r = 3$$

21. 2 மற்றும் 3 என்ற இலக்கங்களை கொண்டு உருவாக்கப்படும் 10 இலக்க எண்களின் எண்ணிக்கை

- (1) $^{10}C_2 + ^9C_2$ (2) 2^{10}
(3) $2^{10} - 2$ (4) $10!$

குறிப்பு : 2 மற்றும் 3 என்ற இலக்கங்களை கொண்டு உருவாக்கப்படும் 10 இலக்க எண்களின் எண்ணிக்கை 2^{10} . [விடை : (2) 2^{10}]

22. P_r என்பது nP_r ஐ குறித்தால் $1 + P_1 + 2P_2 + 3P_3 + \dots + nP_n$ என்ற தொடரின் கூடுதல்

- (1) P_{n+1} (2) $P_{n+1} - 1$
(3) $P_{n-1} + 1$ (4) ${}^{(n+1)}P_{(n-1)}$

குறிப்பு : $1+1|2|2+3|3\dots+n|n|=n+1$

$\Rightarrow$ நிரூபணம் $n = 1$ என்க,

LHS = $1 + 1 = 2$; RHS = $|2| = 2$

$n = 1$ க்கு சரி, $n = 0$ க்கும் கூட இது சரி, $n = k$ க்கு சரி என்க.

$1+1|2|2+3|3\dots+n|n|=k+1$

$\Rightarrow 1+1|2|2+3|3\dots+k|k+(k+1)|k+1|$

$|k+1+(k+1)|k+1|=|k+1|[1+k+1]$

$\Rightarrow |k+1|(k+2)=|k+2|$

இது $k + 1$ க்கும் சரி, கணிதத் தொகுத்தறிதல் முறைப்படி, எல்லா $n \geq 0$, $n \in \mathbb{Z}$ க்கும் சரியாகும்.

[விடை : (2) $P_{n+1} - 1$]

23. முதல் n ஒற்றை இயல் எண்களின் பெருக்கலின் மதிப்பு [Qy - 2018]

- (1) ${}^{2n}C_n \times {}^nP_n$ (2) $\left(\frac{1}{2}\right)^n \times {}^{2n}C_n \times {}^nP_n$
(3) $\left(\frac{1}{4}\right)^n \times {}^{2n}C_n \times {}^{2n}P_n$ (4) ${}^nC_n \times {}^nP_n$

குறிப்பு : $1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1) = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \dots (2n-1)(2n)}{2 \cdot 4 \dots (2n)}$

$\Rightarrow \frac{|2n|}{2^n|n|} = \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot {}^{2n}C_n \times {}^nP_n$

[விடை : (2) $\left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot {}^{2n}C_n \times {}^nP_n$]

24. ${}^nC_4, {}^nC_5, {}^nC_6$ ஆகியவை APயில் (கூட்டுத்தொடரில்) உள்ளன எனில், n -ன் மதிப்பு [அ.மா.வி - 2018]

- (1) 14 (2) 11 (3) 9 (4) 5

குறிப்பு : கொடுக்கப்பட்டுள்ள ${}^nC_4, {}^nC_5, {}^nC_6$ ஆகியவை AP யில் உள்ளன.

$\Rightarrow {}^{2n}C_5 = {}^nC_4 + {}^nC_6$

$\Rightarrow \frac{2|n|}{n-5|5|} = \frac{|n|}{n-4|4|} + \frac{|n|}{n-6|6|}$

$$\Rightarrow \frac{2}{n-5|5|} = \frac{1}{n-4|4|} + \frac{1}{n-6|6|}$$

$$\Rightarrow \frac{2(n-4)6}{(n-4)|n-5|5.6} = \frac{5.6}{n-4.5.6|4|} + \frac{(n-4)(n-5)}{|6(n-4)(n-5)|n-6|}$$

$$\Rightarrow \frac{12(n-4)}{|n-4|6} = \frac{30}{|n-4|6} + \frac{(n-4)(n-5)}{|n-4|6}$$

$$\Rightarrow 12n - 48 = 30 + n^2 - 9n + 20$$

$$\Rightarrow n^2 - 21n + 98 = 0$$

$$(n-14)(n-7) = 0$$

$$\Rightarrow n = 14 \text{ (அல்லது) } n = 7. \quad [\text{விடை : (1) } 14]$$

25. $1 + 3 + 5 + 7 + \dots + 17$ -ன் மதிப்பு

- (1) 101 (2) 81 (3) 71 (4) 61

குறிப்பு : $1 + 3 + 5 + 7 + \dots + 17 = 9^2 = 81$ [விடை : (2) 81]

அரசு தேர்வு வினா - விடை

1 மதிப்பெண்

சரியான அல்லது மிகவும் ஏற்புடைய விடையினைத் தேர்ந்தெடுக்கவும்.

1. எண்கோணத்தில் உள்ள மூலைவிட்டங்களின் எண்ணிக்கை [Qy - 2019]

- (1) 28 (2) 20 (3) 10 (4) 16

குறிப்பு : எண் கோணத்தில் உள்ள மூலை விட்டங்கள்

$$= 8C_2 - 8 = \frac{8 \times 7}{1 \times 2} = 28 - 8 = 20 \quad [\text{விடை : (3) } 20]$$

2. "MAXIMUM", என்ற வார்த்தையிலுள்ள எழுத்துக்களை பயன்படுத்தி தொடர்ச்சியாக இரு உயிரெழுத்துக்கள் அல்லாத வகையில் எத்தனை வார்த்தைகளை உருவாக்க இயலும்? [Qy - 2019]

- (1) 4! (2) $3! \times 4!$
(3) 7! (4) 5!

குறிப்பு : MAXIMUM, என்ற வார்த்தையிலிருந்து இரண்டு மெய் எழுத்துக்கள் ஒன்றாக இல்லாமல் எத்தனை வார்த்தைகள் உள்ளது. MAXIMUM என்ற வார்த்தையில் 4 மெய் எழுத்துக்கள் மற்றும் மூன்று உயிர் எழுத்துக்கள் உண்டு. புள்ளியிடப்பட்ட இடங்களில் நிரப்பப்பட வேண்டிய எழுத்துகள் MXMM.

$$\text{எனவே தேவையான வார்த்தைகள் } 3! \times \frac{4!}{3!} = 4!$$

[விடை : (1) 4!]

05

ஈருறுப்புத் தேற்றம், தொடர்முறைகள் மற்றும் தொடர்கள்

புத்தக வினாக்கள்

பயிற்சி 5.1

1. விரிவுபடுத்துக. (i) $\left(2x^2 - \frac{3}{x}\right)^3$

(ii) $\left(2x^2 - 3\sqrt{1-x^2}\right)^4 + \left(2x^2 + 3\sqrt{1-x^2}\right)^4$

தீர்வு :

(i) $\left(2x^2 - \frac{3}{x}\right)^3$

$\therefore (x-a)^n = x^n + {}^nC_1 x^{n-1} (-a) + {}^nC_2 x^{n-2} (-a)^2 + \dots + (-a)^n$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \left(2x^2 - \frac{3}{x}\right)^3 &= (2x^2)^3 + {}^3C_1 (2x^2)^2 \left(\frac{-3}{x}\right)^1 + \\ &\quad + {}^3C_2 (2x^2)^1 \left(\frac{-3}{x}\right)^2 + \left(\frac{-3}{x}\right)^3 \\ &= 8x^6 + 3(4x^4) \left(\frac{-3}{x}\right) + \frac{3 \times 2}{2 \times 1} (2x^2) \left(\frac{9}{x^2}\right) + \left(\frac{-27}{x^3}\right) \\ &= 8x^6 - 36x^3 + 54 - \frac{27}{x^3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(ii)} \quad &\left(2x^2 - 3\sqrt{1-x^2}\right)^4 + \left(2x^2 + 3\sqrt{1-x^2}\right)^4 \\ &= \left[(2x^2)^4 - {}^4C_1 (2x^2)^3 (-3\sqrt{1-x^2})^1 + \right. \\ &\quad \left. {}^4C_2 (2x^2)^2 (-3\sqrt{1-x^2})^2 + {}^4C_3 (2x^2)^1 (3\sqrt{1-x^2})^3 \right. \\ &\quad \left. + (3\sqrt{1-x^2})^4\right] \\ &\quad + \left[(-3\sqrt{1-x^2})^2 + {}^4C_3 (2x^2)^1 (3\sqrt{1-x^2})^3 + (3\sqrt{1-x^2})^4\right] \\ &= \left[(2x^2)^4 + {}^4C_1 (2x^2)^3 (3\sqrt{1-x^2})^1 + {}^4C_2 (2x^2)^2 \right. \\ &\quad \left. (3\sqrt{1-x^2})^2 + {}^4C_3 (2x^2) (3\sqrt{1-x^2})^3 + (3\sqrt{1-x^2})^4\right] \\ &= 2 \left[(2x^2)^4 + {}^4C_2 (2x^2)^2 (3\sqrt{1-x^2})^2 + (3\sqrt{1-x^2})^4\right] \end{aligned}$$

[137]

$$\begin{aligned} &= 2 \left[(16x^8) + \frac{4 \times 3}{2 \times 1} \times 4x^4 \times 9(1-x^2) + 3^4 (1-x^2)^2 \right] \\ &= 2 \left[16x^8 + 216x^4 (1-x^2) + 81(1-x^2)^2 \right] \end{aligned}$$

2. மதிப்புக் காண்க.

(i) 102^4 (ii) 99^4 (iii) 9^7

தீர்வு :

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad &(a+b)^n = {}^nC_0 a^n b^0 + {}^nC_1 a^{n-1} b^1 + {}^nC_2 a^{n-2} b^2 + \dots + {}^nC_n a^0 b^n \\ \Rightarrow \quad &(102)^4 = (100+2)^4 = (100)^4 + {}^4C_1 (100)^3 (2)^1 + \\ &\quad {}^4C_2 (100)^2 (2)^2 + {}^4C_3 (100)^1 (2)^3 + {}^4C_4 (100)^0 (2)^4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= 100000000 + 2(1000000)(2) + \frac{4 \times (3)}{2(1)} (10000)(4) \\ &= 100000000 + 8000000 + 240000 + 3200 + 16 \\ &= 108,243,216 \end{aligned}$$

$$\text{(ii)} \quad \therefore (a-b)^n = {}^nC_0 a^n - {}^nC_1 a^{n-1} b + {}^nC_2 a^{n-2} b^2 + \dots + {}^nC_n a^0 b^n \quad [\text{Qy - 2018}]$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad &99^4 = (100-1)^4 \\ &= 100^4 - {}^4C_1 100^3 + {}^4C_2 100^2 - {}^4C_3 100 (1^3) + 1^4 \\ &= 100000000 - 4(1000000) + \frac{4 \times 3}{2 \times 1} (10000) - 4(100) + 1 \\ &= 100000000 - 4000000 + 60000 - 400 + 1 \\ &= 96,059,601 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(iii)} \quad &\therefore (a-b)^n = {}^nC_0 a^n - {}^nC_1 a^{n-1} b + {}^nC_2 a^{n-2} b^2 \\ &\quad + \dots + {}^nC_n b^n \\ \Rightarrow \quad &9^7 = (10-1)^7 = 10^7 - {}^7C_1 10^6 + {}^7C_2 10^5 - {}^7C_3 10^4 + \\ &\quad {}^7C_4 10^3 - {}^7C_5 10^2 + {}^7C_6 10 - 1 \\ &= 10000000 - 7(1000000) + \frac{7 \times 6}{2 \times 1} (100000) \end{aligned}$$

10. மதிப்புக் காண்க. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \left(\frac{1}{9^{n-1}} + \frac{1}{9^{2n-1}} \right)$

தீர்வு : $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \left[\frac{1}{9^{n-1}} + \frac{1}{9^{2n-1}} \right]$ கொடுக்கப்பட்டுள்ள தொடர்

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \left[\frac{9}{9^n} + \frac{9}{9^{2n}} \right]$$

$$= 9 \left[\left(\frac{1}{9} + \frac{1}{9^2} \right) + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{9} \right)^2 + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{9} \right)^4 + \frac{1}{5} \left(\frac{1}{9} \right)^6 + \dots \right]$$

$$= 9 \left[\left(\frac{1}{9} \right) + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{9} \right)^2 + \frac{1}{5} \left(\frac{1}{9} \right)^3 \right] + 9 \left[\frac{1}{9^2} + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{9} \right)^4 + \dots \right]$$

$$= 9 \left(\frac{1}{3} \right) \left[\frac{1}{3} + \frac{\left(\frac{1}{3} \right)^3}{3} + \frac{\left(\frac{1}{3} \right)^5}{3} + \dots \right]$$

$$+ 9 \left(\frac{1}{9} \right) \left[\frac{1}{9} + \frac{\left(\frac{1}{9} \right)^3}{3} + \frac{\left(\frac{1}{9} \right)^5}{5} \right]$$

$$= \frac{3}{2} \left[\log \left(\frac{1+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}} \right) \right] + \frac{1}{2} \log \left(\frac{1+\frac{1}{9}}{1-\frac{1}{9}} \right)$$

$$= \frac{3}{2} \log 2 + \frac{1}{2} \log \left(\frac{5}{4} \right) = \frac{1}{2} \left[\log 2^3 + \log \frac{5}{4} \right]$$

$$= \frac{1}{2} \left[\log 8 + \log \frac{5}{4} \right] = \frac{1}{2} \left[\log 8 \times \frac{5}{4} \right]$$

$$= \frac{1}{2} \log 10 = \frac{1}{2} \log_e 10$$

பயிற்சி 5.5

சரியான அல்லது மிகவும் ஏற்புடைய விடையினைத் தேர்ந்தெடுக்கவும்

1. $2 + 4 + 6 + \dots + 2n$ -ன் மதிப்பு

- (1) $\frac{n(n-1)}{2}$ (2) $\frac{n(n+1)}{2}$
 (3) $\frac{2n(2n+1)}{2}$ (4) $n(n+1)$

குறிப்பு : $2 + 4 + 6 + \dots + 2n$
 $= 2(1 + 2 + 3 + \dots + n) = 2 \frac{n(n+1)}{2} = n(n+1)$

[விடை : (4) $n(n+1)$]

2. $(2 + 2x)^{10}$ இல் x^6 -ன் கெழு

[Qy - 2018]

- (1) $^{10}C_6$ (2) 2^6
 (3) $^{10}C_6 2^6$ (4) $^{10}C_6 2^{10}$

குறிப்பு : $(2 + 2x)^{10}$ -ன் கெழு
 $\Rightarrow ^{10}C_6 (2)^{10-6} (2x)^6 = ^{10}C_6 2^4 2^6 x^6$
 கெழு $^{10}C_6 2^{10}$

[விடை : (4) $^{10}C_6 2^{10}$]

3. $(2x + 3y)^{20}$ என்ற விரிவில் $x^8 y^{12}$ -ன் கெழு

[அ.மா.வி - 2018]

- (1) 0 (2) $2^8 3^{12}$
 (3) $2^8 3^{12} + 2^{12} 3^8$ (4) $^{20}C_8 2^8 3^{12}$

குறிப்பு : $(2x + 3y)^{20}$, $x^8 y^{12}$ கொண்டிருக்கும் உறுப்பு
 $^{20}C_{12} (2x)^{20-12} (3y)^{12} = ^{20}C_{12} 2^8 3^{12} x^8 y^{12}$
 கெழுவானது $^{20}C_{12} 2^8 3^{12} = ^{20}C_8 2^8 3^{12}$ ($\because ^{20}C_{12} = ^{20}C_8$)

[விடை : (4) $^{20}C_8 2^8 3^{12}$]

4. r -ன் எல்லா மதிப்புக்கும் $^{nC}_{10} > ^nC_r$ எனில் n -ன் மதிப்பு

- (1) 10 (2) 21 (3) 19 (4) 20

குறிப்பு : $^{20}C_{10} > ^{20}C_r$ எல்லா r -ன் மதிப்புக்கும் [விடை : (4) 20]

5. இரு எண்களின் கூட்டுச்சராசரி a மற்றும் பெருக்குச் சராசரி g எனில்,

[அ.மா.வி - 2018]

- (1) $a \leq g$ (2) $a \geq g$ (3) $a = g$ (4) $a > g$

குறிப்பு : $AM \geq GM \Rightarrow a \geq g$ [விடை : (2) $a \geq g$]

6. $(1 + x^2)^2 (1 + x)^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + x^{n+4}$

மற்றும் a_0, a_1, a_2 ஆகியவை கூட்டுத் தொடர் முறை எனில் n -ன் மதிப்பு

- (1) 1 (2) 2 (3) 3 (4) 4

குறிப்பு : $(1+x^2)^2 (1+x)^n = (1+2x^2+x^4)(1+nx+\frac{n(n-1)}{2}x^2 \dots)$

$$\therefore a_0 = 1; a_1 = n; a_2 = \frac{n(n-1)}{2} + 2$$

a_0, a_1, a_2 ஆகியவை AP

$$\therefore 1 + \frac{n(n-1)}{2} + 2 = 2n \Rightarrow 2 + n^2 - n + 4 = 4n$$

$$n^2 - 5n + 6 = 0$$

$$(n-2)(n-3) = 0 \Rightarrow n = 2 \text{ (அ) } 3$$

[விடை : (2) 2 (அ) (3) 3]

7. $a, 8, b$ என்பன கூட்டுத்தொடர் முறை, $a, 4, b$ என்பன பெருக்குத் தொடர் முறை மற்றும் a, x, b என்பன இசைத்தொடர் முறை எனில், x -ன் மதிப்பு

- (1) 2 (2) 1 (3) 4 (4) 16

குறிப்பு : $a + b = 16, ab = 16, x = \frac{2ab}{a+b} \Rightarrow x = \frac{2 \times 16}{16} = 2$

[விடை : (1) 2]

8. $\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{3} + 2\sqrt{2}}, \dots$ என்ற தொடர்முறை

- (1) கூட்டுத் தொடர்முறை
 (2) பெருக்குத் தொடர்முறை
 (3) இசைத் தொடர்முறை
 (4) கூட்டு பெருக்குத் தொடர்முறை

06

இரு பரிமாண பகுமுறை வடிவியல்

புத்தக வினாக்கள்

பயிற்சி 6.1

1. கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள ஆயத்தொலைகளை உடைய நகரும் புள்ளி P-ன் நியமப்பாதையின் சமன்பாட்டைக் காண்க. இங்கு α ஒரு துணையலகு ஆகும்.

(i) $(9 \cos \alpha, 9 \sin \alpha)$ (ii) $(9 \cos \alpha, 6 \sin \alpha)$

தீர்வு :

(i) P(h, k) நகரும் புள்ளி, $h = 9 \cos \alpha$, $k = 9 \sin \alpha$
 $\frac{h}{9} = \cos \alpha$, $\frac{k}{9} = \sin \alpha$

α வை முழுவதும் நீக்க, வாக்கப்படுத்த

$$\left(\frac{h}{9}\right)^2 + \left(\frac{k}{9}\right)^2 = \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$$

$$\frac{h^2}{81} + \frac{k^2}{81} = 1 \quad [\because \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1]$$

$$h^2 + k^2 = 81$$

$$P(h, k) \text{ ன் நியமப்பாதை } x^2 + y^2 = 81$$

(ii) $(9 \cos \alpha, 6 \sin \alpha)$

P(h, k) நகரும் புள்ளி $h = 9 \cos \alpha$, $k = 6 \sin \alpha$

α வை நீக்க, வாக்கப்படுத்தி கூட்ட

$$\left(\frac{h}{9}\right)^2 + \left(\frac{k}{6}\right)^2 = \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha$$

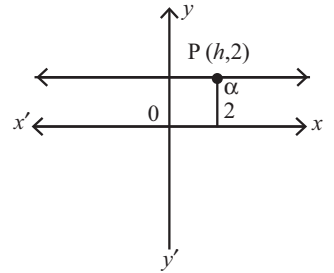
$$\frac{h^2}{81} + \frac{k^2}{36} = 1 \quad (\because \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1)$$

$$\therefore P(h, k) \text{ ன் நியமப்பாதை } = \frac{x^2}{81} + \frac{y^2}{36} = 1$$

2. (i) x-அச்சிலிருந்து இரண்டு அலகுகள் மற்றும்
(ii) y-அச்சிலிருந்து மூன்று அலகுகள் என்ற மாறாத தொலைவில் நகரும் புள்ளி P-ன் நியமப்பாதையின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

தீர்வு :

- (i) x அச்சிலிருந்து 2 அலகுகள் தூரத்தில் நகரும் புள்ளி P(h, k) x அச்சிற்கு இணையான கோட்டின் சமன்பாடு



$$y = c$$

$$\therefore c = 2$$

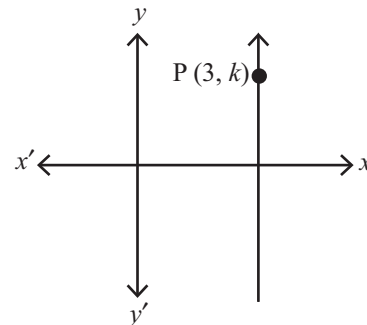
$$\therefore P(h, k) \text{ ன் நியமப்பாதை}$$

$$y = 2$$

- (ii) y அச்சிற்கு இணையான கோட்டின் சமன்பாடு $x = k$

y அச்சிலிருந்து 3 அலகுகள் தூரத்தில் நகரும் புள்ளி P(h, k)-ன் நியமப்பாதை

$$x = 3$$



பயிற்சி 6.4

1. $x - 2y - 3 = 0$ மற்றும் $x + y + 5 = 0$ என்ற தனித்தனிச் சமன்பாடுகளைக் கொண்ட கோடுகளின் ஒருங்கிணைந்த சமன்பாட்டைக் காண்க.

தீர்வு : தனித்தனிச் சமன்பாடுகள் $x - 2y - 3 = 0$,
 $x + y + 5 = 0$
 அவற்றின் ஒருங்கிணைந்த சமன்பாடு
 $\Rightarrow x^2 + xy + 5x - 2xy - 2y^2 - 10y - 3x - 3y - 15 = 0$
 $\Rightarrow x^2 - 2y^2 - xy + 5x - 3y - 15 = 0$

2. $4x^2 + 4xy + y^2 - 6x - 3y - 4 = 0$ என்பது ஒரு இணை இரட்டை நேர்க்கோட்டின் சமன்பாட்டைக் குறிக்கும் எனக் காட்டுக. [Hy - 2018]

தீர்வு : கொடுக்கப்பட்டுள்ள இணை இரட்டை நேர்க்கோட்டின் சமன்பாடு $4x^2 + 4xy + y^2 - 6x - 3y - 4 = 0$
 பொதுச் சமன்பாடு
 $= ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$

$$\begin{array}{l|l|l} \text{இங்கு } a = 4 & b = 1 & 2f = -3 \\ 2h = 4 & 2g = -6 & f = \frac{-3}{2} \\ h = \frac{4}{2} = 2 & g = \frac{-6}{2} = -3 & c = -4 \end{array}$$

இரட்டை இணை கோடுகளுக்கான கட்டுப்பாடு

$$\begin{array}{l} h^2 - ab = 0 \\ 22 - 4(1) = 0 \\ 4 - 4 = 0 \\ 0 = 0 \end{array}$$

இணைக் கோடுகளைக் குறிக்கும் கட்டுப்பாடு

$$\begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 4 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & \frac{-3}{2} \\ 0 & -3 & -4 \end{vmatrix} = 0$$

R_1 மூலம் விரிவுபடுத்த

$$\begin{aligned} \Rightarrow 4\left(-4 - \frac{9}{4}\right) - 2\left(-8 - \frac{9}{2}\right) - 3(-3 + 3) &= 0 \\ \Rightarrow 4\left(\frac{-16-9}{4}\right) + (-2)\left(\frac{-16-9}{2}\right) - 0 &= 0 \\ \Rightarrow -25 + 25 &= 0 \end{aligned}$$

$\therefore$ கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாடு இணைகோடுகளைக் குறிக்கும்.

3. $2x^2 + 3xy - 2y^2 + 3x + y + 1 = 0$ என்ற கோடு ஒரு செங்குத்து இரட்டை நேர்க்கோடு எனக் காட்டுக.

தீர்வு : $2x^2 + 3xy - 2y^2 + 3x + y + 1 = 0$ கொடுக்கப்பட்ட இணை கோடுகளின் சமன்பாடு

இரட்டை இணைகோடுகளுக்கான பொதுச் சமன்பாடு
 $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$

$$\begin{array}{l|l|l} a = 2 & b = -2 & 2f = 1 \\ 2h = 3 & 2g = 3 & f = \frac{1}{2} \\ h = \frac{3}{2} & g = \frac{3}{2} & c = 1 \end{array}$$

இரட்டைக் கோடுகள் செங்குத்தாக இருக்கக் கட்டுப்பாடு

$$a + b = 0$$

$$\therefore 2 + (-2) = 0$$

$\therefore$ இவை ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தாக இருக்கும்.

4. $2x^2 - xy - 3y^2 - 6x + 19y - 20 = 0$ என்பது ஒன்றையொன்று வெட்டிக் கொள்ளும் கோடுகள் எனவும், அதற்கு இடைப்பட்ட கோணம் $\tan^{-1}(5)$ என நிறுவுக.

தீர்வு : $2x^2 - xy - 3y^2 - 6x + 19y - 20 = 0$ என்பது கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாடு

$$2x^2 - xy - 3y^2 = (2x - 3y)(x + y)$$

(காரணிப்படுத்துதல்)

$$\therefore (2x^2 - xy - 3y^2 - 6x + 19y - 20) = (2x - 3y + l)(x + y + m)$$

x, y -ன் கெழுக்களை இருபுறமும் சமப்படுத்த

$$-6 = 2m + l \quad \dots(1)$$

$$19 = -3m + l \quad \dots(2)$$

$$\begin{array}{r} (-) \quad (+) \quad (-) \\ \hline -25 = 5m \end{array}$$

$\Rightarrow$

$$m = -5$$

$m = -5$ என (1) ல் பிரதியிட

$$-6 = 2(-5) + l$$

$\Rightarrow$

$$-6 = -10 + l$$

$$\therefore l = 4$$

$\therefore$ தனித்தனி சமன்பாடுகள் $2x - 3y + 4 = 0 \quad \dots(3)$

$$x + y - 4 = 0 \quad \dots(4)$$

வெட்டும் புள்ளியை காண (3), (4) ஐத் தீர்க்க

$$(3) \Rightarrow 2x - 3y + 4 = 0$$

$$(4) \times 2 \Rightarrow 2x + 2y - 10 = 0$$

$$\begin{array}{r} (-) \quad (-) \quad (+) \\ \hline -5y + 14 = 0 \end{array}$$

$\Rightarrow$

$$-5y + 14 = 0$$

$\Rightarrow$

$$-5y = -14 \Rightarrow y = \frac{14}{5}$$

தொகுதி - II

கணிதவியல்

11^{ஆம்} வகுப்பு

07

அணிகளும் அணிக்கோவைகளும்

புத்தக வினாக்கள்

பயிற்சி 7.1

1. (i) $a_{ij} = \frac{(i-2j)^2}{2}$ $m=2, n=3$

(ii) $a_{ij} = \frac{|3i-4j|}{4}$, $m=3, n=4$ என இருக்குமாறு

உறுப்புகளைக் கொண்ட $m \times n$ வரிசை உடைய

$A = [a_{ij}]$ அணிகளை உருவாக்குக.

தீர்வு : (i) $a_{ij} = \frac{(i-2j)^2}{2}$ $m=2, n=3$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$$

$$\therefore a_{11} = \frac{(1-2 \times 1)^2}{2} = \frac{(1-2)^2}{2} = \frac{(-1)^2}{2} = \frac{1}{2}$$

$$a_{12} = \frac{(1-2 \times 2)^2}{2} = \frac{(1-4)^2}{2}$$

$$= \frac{(-3)^2}{2} = \frac{9}{2}$$

$$a_{13} = \frac{(1-2 \times 3)^2}{2} = \frac{(1-6)^2}{2}$$

$$= \frac{(-5)^2}{2} = \frac{25}{2}$$

$$a_{21} = \frac{(2-2 \times 1)^2}{2} = \frac{(2-2)^2}{2} = \frac{0}{2} = 0$$

$$a_{22} = \frac{(2-2 \times 2)^2}{2} = \frac{(2-4)^2}{2}$$

$$= \frac{(-2)^2}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

$$a_{23} = \frac{(2-2 \times 3)^2}{2} = \frac{(2-6)^2}{2}$$

$$= \frac{(-4)^2}{2} = \frac{16}{2} = 8$$

$$\therefore A_{ij} = [a_{ij}] = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{9}{2} & \frac{25}{2} \\ 0 & 2 & 8 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 9 & 25 \\ 0 & 4 & 16 \end{pmatrix}$$

(ii) $a_{ij} = \frac{|3i-4j|}{4}$, $m=3, n=4$.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}$$

$$a_{11} = \frac{|3 \times 1 - 4 \times 1|}{4} = \frac{|3-4|}{4} = \frac{|-1|}{4} = \frac{1}{4}$$

$$a_{12} = \frac{|3 \times 1 - 4 \times 2|}{4} = \frac{|3-8|}{4} = \frac{|-5|}{4} = \frac{5}{4}$$

$$a_{13} = \frac{|3 \times 1 - 4 \times 3|}{4} = \frac{|3-12|}{4} = \frac{|-9|}{4} = \frac{9}{4}$$

$$a_{14} = \frac{|3 \times 1 - 4 \times 4|}{4} = \frac{|3-16|}{4} = \frac{|-13|}{4} = \frac{13}{4}$$

$$a_{21} = \frac{|3 \times 2 - 4 \times 1|}{4} = \frac{|6-4|}{4} = \frac{|2|}{4} = \frac{2}{4}$$

$$a_{22} = \frac{|3 \times 2 - 4 \times 2|}{4} = \frac{|6-8|}{4} = \frac{|-2|}{4} = \frac{2}{4}$$

$$a_{23} = \frac{|3 \times 2 - 4 \times 3|}{4} = \frac{|6-12|}{4} = \frac{|-6|}{4} = \frac{6}{4}$$

$$a_{24} = \frac{|3 \times 2 - 4 \times 4|}{4} = \frac{|6-16|}{4} = \frac{|-10|}{4} = \frac{10}{4}$$

இரண்டாம் நிரையில் உள்ள உறுப்புகள் 2, 0, 1.

2-ன் இணைக்காரணி

$$A_{21} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 3 & 8 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = (-1)^3 (9 - 16) = (-1) \times (-7) = 7$$

0-ன் இணைக்காரணி

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 5 & 8 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = (-1)^4 (15 - 8) = 7$$

1-ன் இணைக்காரணி

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = (-1)^5 (10 - 3) = -1 \times 7 = -7$$

$$\begin{aligned} \therefore |A| &= a_{21} A_{21} + a_{22} A_{22} + a_{23} A_{23} \\ &= 2 \times 7 + 0 \times 7 + 1 \times (-7) \\ &= 14 + 0 - 7 = 7 \end{aligned}$$

பயிற்சி 7.3

பின்வருவனவற்றிற்கு காரணித் தேற்றத்தை பயன்படுத்துக :

$$1. \begin{vmatrix} x & a & a \\ a & x & a \\ a & a & x \end{vmatrix} = (x-a)^2 (x+2a) \text{ என நிறுவுக.}$$

$$\begin{aligned} \text{தீர்வு : } \Delta &= \begin{vmatrix} x & a & a \\ a & x & a \\ a & a & x \end{vmatrix}, x=a \text{ என } \Delta\text{-ல் பிரதியிட} \\ \therefore \Delta &= \begin{vmatrix} a & a & a \\ a & a & a \\ a & a & a \end{vmatrix} = 0 \end{aligned}$$

அனைத்து நிரைகளும் (3 நிரைகள்) சமம் என்பதால் $(x-a)^2$ ஆனது Δ -ன் ஒரு காரணி ஆகும்.

$x = -2a$ என Δ -ல் பிரதியிட

$$\Delta = \begin{vmatrix} -2a & a & a \\ a & -2a & a \\ a & a & -2a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & a & a \\ 0 & -2a & a \\ 0 & a & -2a \end{vmatrix} = 0$$

$$[\because C_1 \rightarrow C_1 + C_2 + C_3]$$

$\therefore (x+2a)$ ஒரு காரணியாகும்.

$\therefore (x-a)^2 (x+2a)^1$ ஆனது Δ -ன் காரணிகள் மற்றும் படியானது 3ஆகும்.

முதன்மை மூலைவிட்டத்தின் பெருக்கற்பலனின் படியும் 3.

எனவே மற்றொரு காரணி k ஆக இருக்க வேண்டும்.

$$\therefore \begin{vmatrix} x & a & a \\ a & x & a \\ a & a & x \end{vmatrix} = k(x-a)^2 (x+2a)$$

x^3 - ன் உறுப்புகளை இருபுறமும் சமப்படுத்தி

$$1 = k$$

$$\therefore \begin{vmatrix} x & a & a \\ a & x & a \\ a & a & x \end{vmatrix} = (x-a)^2 (x+2a)$$

$$2. \begin{vmatrix} b+c & a-c & a-b \\ b-c & c+a & b-a \\ c-b & c-a & a+b \end{vmatrix} = 8abc \text{ என நிறுவுக.}$$

$$\text{தீர்வு : } \Delta = \begin{vmatrix} b+c & a-c & a-b \\ b-c & c+a & b-a \\ c-b & c-a & a+b \end{vmatrix}$$

இங்கு $a = 0$ என பிரதியிட

$$= \begin{vmatrix} b+c & -c & -b \\ b-c & c & b \\ c-b & c & b \end{vmatrix}$$

C_2, C_3 -யிலிருந்து c, b -ஐ வெளியில் எடுக்க

$$= bc \begin{vmatrix} b+c & -1 & -1 \\ b-c & 1 & 1 \\ c-b & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$\Rightarrow a$ ஒரு காரணியாகும். இதைப் போல் b, c யும் காரணிகளாகும். கொடுக்கப்பட்டுள்ள அணிக் கோவையின் முதன்மை மூலைவிட்ட பெருக்கற் பலனின் படியானது 3 ஆகும். எனவே மற்றொருபடி k ஆகும்.

$$\therefore \begin{vmatrix} b+c & a-c & a-b \\ b-c & c+a & b-a \\ c-b & c-a & a+b \end{vmatrix} = kabc$$

இதில் $a = 1, b = 1, c = 1$ எனப் பிரதியிட

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = k \times 1 \times 1 \times 1$$

$$\Rightarrow k = 8 \quad \therefore \Delta = 8abc$$

08

வெக்டர் இயற்கணிதம் - I (Vector Algebra - I)

புத்தக வினாக்கள்

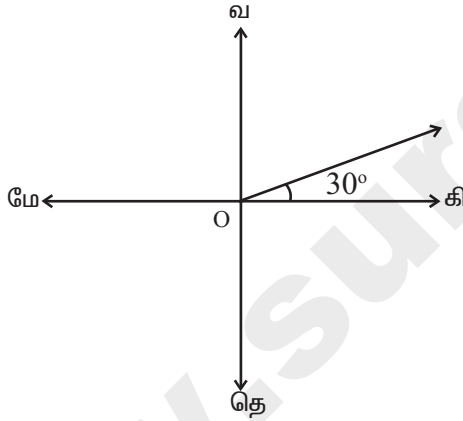
பயிற்சி 8.1

1. கீழ்க்காணும் இடப்பெயர்ச்சிகளை வரைபடம் மூலம் விவரிக்க.

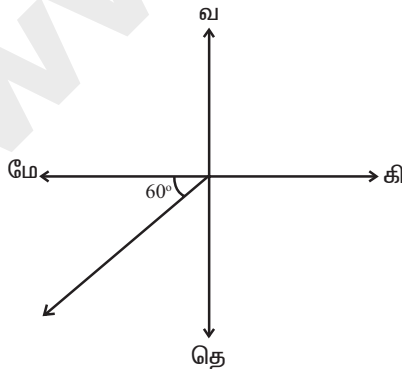
- (i) 45 செ.மீ, 30° கிழக்கிலிருந்து வடக்காக
- (ii) 80 கி.மீ., 60° மேற்கிலிருந்து தெற்காக

தீர்வு :

- (i) 45 செ.மீ, 30° கிழக்கிலிருந்து வடக்காக



- (ii) 80 கி.மீ., 60° மேற்கிலிருந்து தெற்காக



2. தொடர்பு R ஆனது V என்ற வெக்டர்களின் கணத்தின் மீது " $a R b$ என்பது $a = b$ " என வரையறுக்கப்பட்டால் அது V -ன் மீது ஒரு சமானத் தொடர்பு என நிறுவுக.

தீர்வு : $a, b, c \in V$, V என்பது வெக்டர்களின் கணம் என்க.

$a R b$ என்பது $a = b$ என்ற தொடர்பு

- (i) $a = a$
- (ii) $a = b \Rightarrow b = a \therefore a R b \Rightarrow b R a$
- (iii) $a = b, b = c \Rightarrow a = c$
 $\therefore a R b, b R c \Rightarrow a R c$

$\therefore R$ ஆனது V -ன் மீது ஒரு சமானத் தொடர்பு ஆகும்.

3. A மற்றும் B ஆகியவை a மற்றும் b -ன் நிலைவெக்டர்கள் எனில் AB என்ற கோட்டுத் துண்டை மூன்ற சம பாகங்களாக பிரிக்கும் புள்ளிகளின் நிலை வெக்டர்கள் $\frac{a+2b}{3}$ மற்றும் $\frac{b+2a}{3}$ என நிறுவுக.

தீர்வு : $A \xleftarrow{a} \xrightarrow{b} B$
P Q

a, b என்பது A, B எனும் புள்ளிகளைப் பொறுத்த நிலை வெக்டர்கள் என்க.

$$\Rightarrow OA = a, OB = b.$$

P எனும் புள்ளி AB ஐ $1:2$ என்ற விகிதத்திலும்

Q எனும் புள்ளி AB ஐ $2:1$ என்ற விகிதத்திலும் பிரிக்கும் புள்ளிகள்.

$$|\vec{c}|^2 + |\vec{a}|^2 + 2(\vec{c} \cdot \vec{a}) = |\vec{b}|^2$$

$$16 + 4 + 2(\vec{c} \cdot \vec{a}) = 9$$

$$20 + 2(\vec{c} \cdot \vec{a}) = 9$$

$$2(\vec{c} \cdot \vec{a}) = 9 - 20 = -11$$

$$(\vec{c} \cdot \vec{a}) = \frac{-11}{2}$$

$$\therefore 3(\vec{c} \cdot \vec{a}) = 3\left(\frac{-11}{2}\right) = \frac{-33}{2} \quad \dots (3)$$

$$(1) + (2) + (3)$$

$$4\vec{a} \cdot \vec{b} + 3\vec{b} \cdot \vec{c} + 3\vec{c} \cdot \vec{a} = 6 - \frac{63}{2} - \frac{33}{2}$$

$$= \frac{12 - 63 - 33}{2} = \frac{12 - 96}{2} = \frac{-84}{2} = -42$$

பயிற்சி 8.4

1. $\vec{a} = 2\hat{i} + \hat{j} + 3\hat{k}$ மற்றும் $\vec{b} = 3\hat{i} + 5\hat{j} - 2\hat{k}$ எனில் $\vec{a} \times \vec{b}$ -ன் மதிப்பைக் காண்க.

தீர்வு : $\vec{a} = 2\hat{i} + \hat{j} + 3\hat{k}$,

$$\vec{b} = 3\hat{i} + 5\hat{j} - 2\hat{k}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = (2\hat{i} + \hat{j} + 3\hat{k}) \times (3\hat{i} + 5\hat{j} - 2\hat{k})$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 5 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= \hat{i}(-2 - 15) - \hat{j}(-4 - 9) + \hat{k}(10 - 3)$$

$$= -17\hat{i} + 13\hat{j} + 7\hat{k}$$

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = \sqrt{(-17)^2 + 13^2 + 7^2}$$

$$= \sqrt{289 + 169 + 49} = \sqrt{507}$$

2. $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) + \vec{b} \times (\vec{c} + \vec{a}) + \vec{c} \times (\vec{a} + \vec{b}) = \vec{0}$ எனக் காட்டுக.

தீர்வு : LHS = $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) + \vec{b} \times (\vec{c} + \vec{a}) + \vec{c} \times (\vec{a} + \vec{b})$

$$= \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{a} + \vec{c} \times \vec{a} + \vec{c} \times \vec{b}$$

$$= \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c} - \vec{a} \times \vec{b} - \vec{a} \times \vec{c} - \vec{b} \times \vec{c} = \vec{0} = \text{RHS}$$

எனவே நிரூபிக்கப்பட்டது.

3. $\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$ மற்றும் $\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k}$ என்ற வெக்டர்கள் உள்ள தளத்திற்கு செங்குத்தாகவும் எண்ணளவு $10\sqrt{3}$ உடைய அலகு வெக்டர்களைக் காண்க.

தீர்வு : $\vec{a} = \vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$
 $\vec{b} = \vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k}$

$\vec{a}, \vec{b}$ வெக்டர் தளத்திற்கு செங்குத்தாக உள்ள அலகு

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= \hat{i}(8 - 3) - \hat{j}(4 - 1) + \hat{k}(3 - 2)$$

$$= 5\hat{i} - 3\hat{j} + \hat{k}$$

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = \sqrt{5^2 + (-3)^2 + 1^2}$$

$$= \sqrt{25 + 9 + 1} = \sqrt{35}$$

$\therefore 10\sqrt{3}$ எண்ணளவு கொண்ட அலகு வெக்டர்

$$= \pm 10\sqrt{3} \left(\frac{5\hat{i} - 3\hat{j} + \hat{k}}{\sqrt{35}} \right)$$

4. $\vec{a} = \hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$ மற்றும் $\vec{b} = \hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$ எனில் $\vec{a} + \vec{b}$ மற்றும் $\vec{a} - \vec{b}$, ஆகியவற்றிற்கு தனித்தனியாக செங்குத்தாக உள்ள வெக்டர்களைக் காண்க.

தீர்வு : $\vec{a} = \hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$,
 $\vec{b} = \hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$
 $\therefore \vec{a} + \vec{b} = 2\hat{i} + 3\hat{j} + 4\hat{k}$
 $\vec{a} - \vec{b} = -\hat{j} - 2\hat{k}$

09

வகை நுண்கணிதம்

எல்லைகள் மற்றும் தொடர்ச்சித் தன்மை
(Differential Calculus Limits and Continuity)

புத்தக வினாக்கள்

பயிற்சி 9.1

1 முதல் 6 வரை உள்ள கணக்குகளுக்குக் அட்டவணையைப் பயன்படுத்தி எல்லை மதிப்பைக் கணக்கிடுக.

1. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{x^2-x-2}$

x	1.9	1.99	1.999	2.001	2.01	2.1
f(x)	0.344820	0.33444	0.33344	0.333222	0.33222	0.332258

தீர்வு : $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{x^2-x-2}$

$$f(x) = \frac{x-2}{x^2-x-2} = \frac{\cancel{x-2}}{(\cancel{x-2})(x+1)} = \frac{1}{x+1} \text{ என்க.}$$

அட்டவணையிலிருந்து x ஆனது 2 ஐ நெருங்கும் போது f(x) ஆனது எல்லா நிலைகளிலும் 0.3 ஐ நெருங்குகிறது என தெளிவாகிறது.

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{x^2-x-2} = 0.3$$

2. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{x^2-4}$

x	1.9	1.99	1.999	2.001	2.01	2.1
f(x)	0.25641	0.25062	0.250062	0.24993	0.24937	0.24390

தீர்வு : இங்கு $f(x) = \frac{x-2}{x^2-4} = \frac{\cancel{x-2}}{(x+2)(\cancel{x-2})} = \frac{1}{x+2}$

$$[\because a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)]$$

அட்டவணையிலிருந்து, x ஆனது 2ஐ நெருங்கும் போது f(x) ஆனது 0.25 (தோராயமாக) நெருங்குகிறது.

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{x^2-4} = 0.25$$

3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+3}-\sqrt{3}}{x}$

x	-0.1	-0.01	-0.001	0.01	0.01	0.1
f(x)	0.2911	0.2891	0.2886	0.2886	0.2885	0.28631

தீர்வு : $f(x) = \frac{\sqrt{x+3}-\sqrt{3}}{x}$ என்க

$$= \frac{\sqrt{x+3}-\sqrt{3}}{x} \times \frac{\sqrt{x+3}+\sqrt{3}}{\sqrt{x+3}+\sqrt{3}}$$

$$= \frac{(\sqrt{x+3})^2 - (\sqrt{3})^2}{x(\sqrt{x+3}+\sqrt{3})} = \frac{x+3-3}{x(\sqrt{x+3}+\sqrt{3})} = \frac{x}{x(\sqrt{x+3}+\sqrt{3})}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x+3}+\sqrt{3}}$$

x 0-வை நோக்கிச் செல்ல, $f(x) = \frac{1}{\sqrt{0+3}+\sqrt{3}} = \frac{1}{2\sqrt{3}}$ ஐ

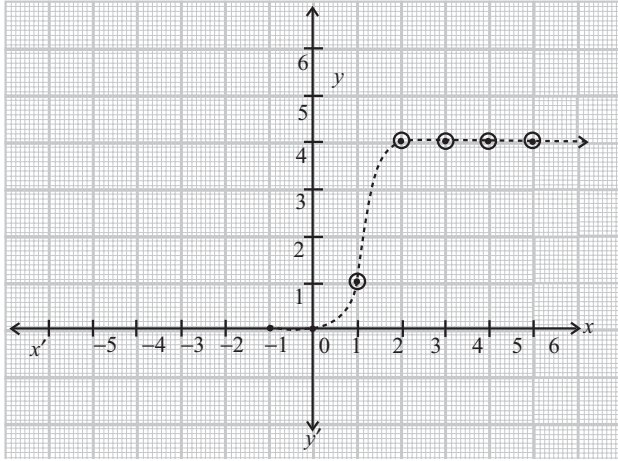
நோக்கிச் செல்கிறது.

மேலும் அட்டவணையிலிருந்து x 0வை நோக்கிச் செல்ல, எல்லா நிலைகளிலும் $f(x) = 0.288$ (தோராயமாக) நோக்கிச் செல்கிறது.

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+3}-\sqrt{3}}{x} = 0.288$$

4. $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{\sqrt{1-x}-2}{x+3}$

x	-3.1	-3.01	-3.00	-2.999	-2.99	-2.9
f(x)	0.24845	-0.24984	-0.24998	-0.25001	-0.25015	-0.25158



8. f மற்றும் g தொடர்ச்சியான சார்புகள் மேலும் $f(3) = 5$ மற்றும் $\lim_{x \rightarrow 3} [2f(x) - g(x)] = 4$, எனில் $g(3)$ -ஐக் காண்க.

தீர்வு : $\lim_{x \rightarrow 3} [2f(x) - g(x)] = 4$
 $f(3) = 5$

$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 3} 2 \cdot f(x) - \lim_{x \rightarrow 3} g(x) = 4$

$\Rightarrow 2f(3) - g(3) = 4$

$[\because f(x), g(x)$ தொடர்ச்சியான சார்பு]

$\Rightarrow 2(5) - g(3) = 4$

$\Rightarrow 10 - g(3) = 4$

$\Rightarrow -g(3) = 4 - 10$

$\Rightarrow \cancel{-}g(3) = \cancel{-}6$

$\Rightarrow g(3) = 6$

9. சார்பு தொடர்ச்சியற்றதாக உள்ள புள்ளிகளைக் காண்க. இந்தப் புள்ளிகளில் எந்தப் புள்ளிகளுக்கு f -க்கு வலப்பக்கத் தொடர்ச்சி, இடப்பக்கத் தொடர்ச்சி மற்றும் எதுவுமில்லை என உள்ளதைக் காண்க. f -ன் வளைவரையை வரைக.

(i) $f(x) = \begin{cases} 2x+1, & x \leq -1 \\ 3x, & -1 < x < 1 \\ 2x-1, & x \geq 1 \end{cases}$

(ii) $f(x) = \begin{cases} (x-1)^3, & x < 0 \\ (x+1)^3, & x \geq 0 \end{cases}$

தீர்வு : $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} 3x = 3$

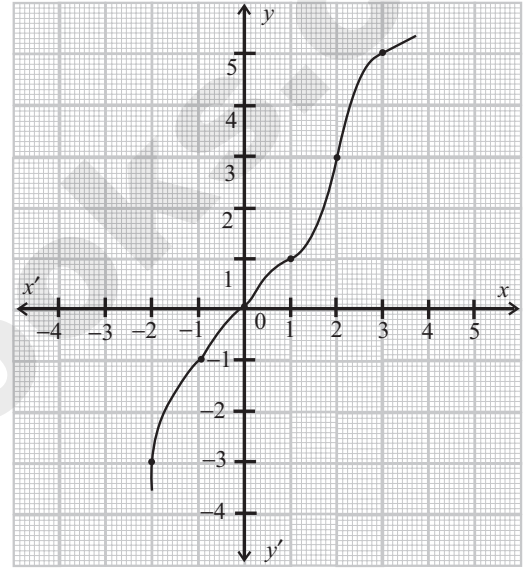
$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} 2x-1 = 2-1=1$

$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$

$f(1) = (2x-1) = 2(1)-1 = 2-1=1$

$\therefore f(x)$ ஆனது $x = 1$ -ல் தொடர்ச்சியற்றது.

x	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	$2x+1$ $= -3$	$2x+1$ $= -1$	$3x$ $= 0$	$2x-1$ $= 1$	$2x-1$ $= 3$	$2x-1$ $= 5$



(ii) $f(x) = \begin{cases} (x-1)^3, & x < 0 \\ (x+1)^3, & x \geq 0 \end{cases}$

$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x-1)^3$
 $= (-1)^3 = -1$

$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x+1)^3 = 1^3 = 1$

$f(0) = (x+1)^3 = 1^3 = 1$

$\therefore \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$

$\therefore f(x)$ ஆனது $x = 0$ -ல் தொடர்ச்சியற்றது.

x	-1	-2	0	1	2
$f(x)$	$(x-1)^3$ $= -8$	$(x-1)^3$ $= -27$	$(x+1)^3$ $= 1$	$(x+1)^3$ $= 8$	$(x+1)^3$ $= 27$

25. f -ன் சார்பு $f(x) = \frac{x-|x|}{x}, x \neq 0$ என வரையறுக்கப்பட்டு

$f(0) = 2$ எனில் f என்பது

- (1) எங்கும் தொடர்ச்சியானது அல்ல
- (2) எல்லா இடங்களிலும் தொடர்ச்சியானது
- (3) $x = 1$ ஐ தவிர எல்லா x மதிப்புகளுக்கும் தொடர்ச்சியானது.
- (4) $x = 0$ -ஐ தவிர எல்லா x மதிப்புகளுக்கும் தொடர்ச்சியானது.

[விடை : (4) $x = 0$ -ஐ தவிர எல்லா x மதிப்புகளுக்கும் தொடர்ச்சியானது]

அரசு தேர்வு வினா - விடை

1 மதிப்பெண்

சரியான அல்லது மிகவும் ஏற்புடைய விடையினைத் தேர்ந்தெடுக்கவும்.

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x}$ காண்க. [Hy - 2019]
- (1) 2 (2) 1/2 (3) 1 (4) 0

குறிப்பு : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x} = \lim_{2x \rightarrow 0} \frac{2 \sin 2x}{2x}$
 $= 2 \lim_{2x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{2x} = 2 \left[\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{\theta} = 1 \right]$

[விடை : (1) 2]

2 மதிப்பெண்கள்

1. மதிப்பிடுக : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{5x} - 1}{x}$. [Hy - 2018]

தீர்வு : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{5x} - 1}{5x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{5x} - 1}{5x} \cdot 5 = 5 (1) = 5$

2. மூடிய இடைவெளி $[a, b]$ -ல், ஒரு தொடர்ச்சியான சார்பினை வரையறுக்கவும். [மார்ச் - 2019]

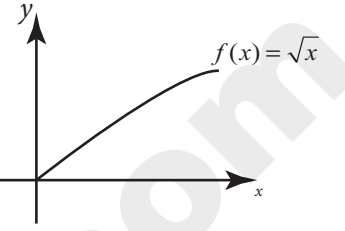
தீர்வு : ஒரு சார்பு $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ -ல் தொடர்ச்சியானது எனில் அது திறந்த இடைவெளி (a, b) ல் தொடர்ச்சியுடையதாகவும் மற்றும் $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$ மற்றும் $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = f(b)$ ஆகவும் இருக்கும்.

3. $f(x) = \sqrt{x}, x \geq 0$ எனில், $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ கிடைக்கப் பெறுமா எனக் காண்க. [மார்ச் - 2019]

தீர்வு : $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} = 0$

$\lim_{x \rightarrow 0^-} \sqrt{x}$ கிடையாது

$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ கிடையாது



3 மதிப்பெண்கள்

1. மதிப்புக் காண்க : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^x - 1}{\sqrt{1+x} - 1}$ [Hy - 2018]

தீர்வு : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^x - 1}{\sqrt{1+x} - 1} = ?$

$$\begin{aligned} \frac{3^x - 1}{\sqrt{1+x} - 1} &= \frac{3^x - 1}{\sqrt{1+x} - 1} \times \frac{\sqrt{1+x} + 1}{\sqrt{1+x} + 1} \\ &= \frac{(3^x - 1)(\sqrt{1+x} + 1)}{x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^x - 1}{\sqrt{1+x} - 1} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^x - 1}{x} \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{1+x} + 1 \\ &= (\log 3) \cdot 2 = 2 \log 3 = \log 9 \end{aligned}$$

2. $x \rightarrow 0$ எனும் போது பின்வரும் சார்புகளுக்கு எல்லைமதிப்பு உள்ளதா எனக் காண்க? விடைக்கான காரணம் கூறுக. $\frac{\sin |x|}{x}$ [Hy & ஜூன் - 2019]

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(-x)}{x} & ; -1 < x < 0 \\ \frac{\sin x}{x} & ; 0 < x < 1 \end{cases}$$

எனவே, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -1$ மற்றும்

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1.$$

இங்கு $f(0^-) \neq f(0^+)$ ஆகையால் எல்லை மதிப்பு இல்லை.

5 மதிப்பெண்கள்

1. தொடர்ச்சியை விவாதிக்க $f(x) = \sqrt{1-x^2}$, இங்கு $x \in [-1, 1]$. [Hy - 2018 & 2019]

தீர்வு : தொடர்ச்சியை விவாதிக்க $f(x) = \sqrt{1-x^2}$.

f யின் சார்பகமாக வரையறுக்கப்படுவது மூலம் இடைவெளி $[-1, 1]$.

10

வகை நுண்கணிதம்

வகைமை மற்றும் வகையிடல் முறைகள்
(Differentiability and Method of Differentiation)

புத்தக வினாக்கள்

பயிற்சி 10.1

1. முதல் கொள்கையினைப் பயன்படுத்திப் பின்வரும் சார்புகளின் வகைக்கெழுக்களைக் காண்க.

(i) $f(x) = 6$

(ii) $f(x) = -4x + 7$

(iii) $f(x) = -x^2 + 2$

தீர்வு :

(i) $f(x) = 6 \quad \dots (1)$
 $f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$

$f(x) = 6$
 $\Rightarrow f(x + \Delta x) = 6 \quad \dots (2)$

$\therefore f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{6 - 6}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{0}{\Delta x} = 0$

(1), (2) லிருந்து

$\therefore f'(x) = 0$

(ii) $f(x) = -4x + 7 \quad \dots (1)$

$\therefore f(x + \Delta x) = -4(x + \Delta x) + 7$
 $= -4x - 4\Delta x + 7 \quad \dots (2)$

$\therefore \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{-4x - 4\Delta x + 7 - (-4x + 7)}{\Delta x}$

(1), (2) லிருந்து

$= \frac{-4\cancel{x} - 4\Delta x + \cancel{7} + 4\cancel{x} - \cancel{7}}{\Delta x} = \frac{-4\Delta x}{\Delta x} = -4$

$\therefore f'(x) = -4$

(iii) $f(x) = -x^2 + 2 \quad \dots (1)$

$f(x + \Delta x) = -(x + \Delta x)^2 + 2$

$= -(x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2) + 2$

$= -x^2 - 2x\Delta x - (\Delta x)^2 + 2 \quad \dots (2)$

(2) - (1) $\Rightarrow f(x + \Delta x) - f(x)$

$= -\cancel{x^2} - 2x\Delta x - (\Delta x)^2 + \cancel{2} - \cancel{x^2} - \cancel{2}$

$= -2x\Delta x - (\Delta x)^2 = \Delta x(-2x - \Delta x)$

$\therefore \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x(-2x - \Delta x)}{\Delta x}$

$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} -2x - \Delta x = -2x - (0) = -2x$

$\therefore f'(x) = -2x$

2. கீழ்க்காணும் சார்புகளுக்கு $x = 1$ -ல் இடப்பக்க மற்றும் வலப்பக்க வகைக்கெழு (கிடைக்கப்பெறின்) காண்க. $x = 1$ -ல் சார்புகளுக்கு வகைமைத்தன்மை உள்ளதா என்பதனையும் காண்க.

(i) $f(x) = |x - 1|$ (ii) $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$

(iii) $f(x) = \begin{cases} x, & x \leq 1 \\ x^2, & x > 1 \end{cases}$

தீர்வு :

(i) $f(x) = |x - 1|$

$f'(1^-) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{|x - 1| - 0}{x - 1}$

$= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{|x - 1|}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} -\frac{(x - 1)}{x - 1} = -1$

$\therefore f'(1^-) = -1$

$\therefore f'(1^+) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$

$= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{|x - 1| - 0}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{|x - 1|}{x - 1}$

$= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x - 1}{x - 1} = 1$

$$f'(a^-) = \lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a^-} \frac{(2a - x) - (a)}{x - a}$$

$$[\because f(x) = 2a - x; f(a) = 2a - a = a]$$

$$= \lim_{x \rightarrow a^-} \frac{a - x}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a^-} \frac{-(x - a)}{x - a} = -1$$

$$f'(a^+) = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{(3x - 2a) - a}{x - a}$$

$$= \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{3x - 3a}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{3(x - a)}{x - a} = 3$$

$$\therefore f'(a^-) \neq f'(a^+)$$

[விடை : (1) $x = a$ -ல் $f(x)$ வகைமை இல்லை]

$$24. f(x) = \begin{cases} ax^2 - b, & -1 < x < 1 \\ \frac{1}{|x|}, & \text{பிற} \end{cases} \quad x=1\text{-ல் வகைமையானது}$$

எனில்

$$(1) a = \frac{1}{2}, b = \frac{-3}{2} \quad (2) a = \frac{-1}{2}, b = \frac{3}{2}$$

$$(3) a = -\frac{1}{2}, b = -\frac{3}{2} \quad (4) a = \frac{1}{2}, b = \frac{3}{2}$$

$$\text{குறிப்பு : } f(x) = \begin{cases} ax^2 - b, & -1 < x < 1 \\ \frac{1}{|x|}, & \text{பிற} \end{cases}$$

$f(x)$ ஆனது $x = 1$ -ல் வகைமையாகிறது என்பதால்

$$f'(1^+) = f'(1^-)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\frac{1}{|x|} - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{ax^2 - b - 1}{x - 1}$$

$$\Rightarrow \frac{1 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{ax^2 - b - 1}{x - 1}$$

$$\Rightarrow a - b - 1 = 0 \Rightarrow a - b = 1$$

$$a = -\frac{1}{2}, b = -\frac{3}{2} \text{ ஆனது}$$

$a - b = 1$ ஐ பூர்த்தி செய்கிறது.

$$[\text{விடை : (3) } a = -\frac{1}{2} \quad b = -\frac{3}{2}]$$

25. $f(x) = |x - 1| + |x - 3| + \sin x$ எனும் சார்பு $\mathbb{R}$ -ல் வகைமையாகாத புள்ளிகளின் எண்ணிக்கை [Hy - 2019]

$$(1) 3 \quad (2) 2 \quad (3) 1 \quad (4) 4$$

குறிப்பு : $f(x) = |x - 1| + |x - 3| + \sin x$ ஆனது $x = 1, x = 3$ -ல் வகைமை ஆகாது. ஏனெனில் $x = 1, x = 3$ -ல் $f(x)$ க்கு செங்குத்து தொடுகோடு உண்டு.

[விடை : (2) 2]

அரசு தேர்வு வினா - விடை

1 மதிப்பெண்

சரியான அல்லது மிகவும் ஏற்புடைய விடையினைத் தேர்ந்தெடுக்கவும்.

1. $\frac{d}{dx} (3^x + x^3) =$ [Hy - 2019]

(1) $3x^3 + (\log 3)3^x$ (2) $x^3 + \log 3$
(3) $(\log 3)(3^x) + 3x^2$ (4) $3^{x-1}x + (\log 3)3^x$

குறிப்பு : $\frac{d}{dx} (3^x) = \frac{dy_1}{dx}$

$$y_1 = 3^x$$

$$\log y_1 = x \log 3$$

$$\frac{1}{y_1} \frac{dy_1}{dx} = \log 3$$

$$\frac{dy_1}{dx} = 3^x \log 3$$

[விடை : (3) $(\log 3)(3^x) + 3x^2$]

2. $f(x) = x \tan^{-1} x$ எனில் $f'(1)$ காண்க : [Hy - 2019]

(1) $\frac{1}{2} - \frac{\pi}{4}$ (2) $\frac{1}{2} + \frac{\pi}{4}$
(3) $\frac{\pi}{4}$ (4) $\frac{1}{2}$

குறிப்பு : $f'(x) = \tan^{-1} x + x \times \frac{1}{1+x^2}$
 $f'(1) = \tan^{-1}(1) + 1 \times \frac{1}{1+1^2} = \frac{1}{2} + \frac{\pi}{4}$

[விடை : (2) $\frac{1}{2} + \frac{\pi}{4}$]

3. $x = 1$ யில் $y = |x - 1|$ -ஐ வகையிடுக [Hy - 2019]

(a) 1 (b) -1
(c) 0 (d) சாத்தியமில்லை

3 மதிப்பெண்கள்

1. வகையிடுக. 2^x [Hy - 2018]

தீர்வு : $y = 2^x$
 $\frac{dy}{dx} = 2^x \log 2$

11

தொகை நுண்கணிதம்

Integral calculus

புத்தக வினாக்கள்

பயிற்சி 11.1

கீழ்க்காண்பனவற்றைத் தொகையிடுக :

1. (i) x^{11} (ii) $\frac{1}{x^7}$ (iii) $\sqrt[3]{x^4}$
(iv) $(x^5)^{\frac{1}{8}}$

தீர்வு :

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad \int x^n dx &= \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \\ \therefore \int x^{11} dx &= \frac{x^{11+1}}{11+1} + c = \frac{x^{12}}{12} + c \\ \text{(ii)} \quad \int \frac{1}{x^7} dx &= \int x^{-7} dx = \frac{x^{-7+1}}{-7+1} \\ &= \frac{x^{-6}}{-6} + c = -\frac{1}{6x^6} + c \\ \text{(iii)} \quad \int \sqrt[3]{x^4} dx &= \int (x^4)^{\frac{1}{3}} dx = \int x^{\frac{4}{3}} dx \\ &= \frac{x^{\frac{4}{3}+1}}{\frac{4}{3}+1} + c = \frac{x^{\frac{7}{3}}}{\frac{7}{3}} + c = \frac{3}{7} x^{\frac{7}{3}} + c \\ \text{(iv)} \quad \int (x^5)^{\frac{1}{8}} dx &= \int x^{\frac{5}{8}} dx = \frac{x^{\frac{5}{8}+1}}{\frac{5}{8}+1} + c \\ &= \frac{x^{\frac{13}{8}}}{\frac{13}{8}} + c = \frac{8}{13} x^{\frac{13}{8}} + c \end{aligned}$$

2. (i) $\frac{1}{\sin^2 x}$ (ii) $\frac{\tan x}{\cos x}$ (iii) $\frac{\cos x}{\sin^2 x}$

- (iv) $\frac{1}{\cos^2 x}$

தீர்வு :

- (i) $\frac{1}{\sin^2 x}$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = \int \operatorname{cosec}^2 x dx = -\cot x + c$$

- (ii) $\frac{\tan x}{\cos x}$

$$\begin{aligned} \int \frac{\tan x}{\cos x} dx &= \int \tan x \times \frac{1}{\cos x} dx \\ &= \int \tan x \sec x dx = \sec x + c \end{aligned}$$

- (iii) $\frac{\cos x}{\sin^2 x}$

$$\begin{aligned} \int \frac{\cos x}{\sin^2 x} dx &= \int \frac{\cos x}{\sin x} \times \frac{1}{\sin x} dx \\ &= \int \cot x \operatorname{cosec} x dx \\ &= -\operatorname{cosec} x + c \end{aligned}$$

- (iv) $\frac{1}{\cos^2 x}$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \int \sec^2 x dx = \tan x + c$$

$$-12 = A(1)(2) + B(-2)(2) + (-C+D)(-2)(1)$$

$$\Rightarrow -12 = 2A - 4B + 2C - 2D$$

$$\Rightarrow -12 = -2 - 4 + 2C - 6$$

$$\Rightarrow -12 = -12 + 2C$$

$$\Rightarrow C = 0$$

$$\therefore \frac{3x-9}{(x-1)(x+2)(x^2+1)} = \frac{-1}{x-1} + \frac{1}{x+2} + \frac{3}{x^2+1}$$

$$\begin{aligned} \therefore I &= \int \frac{(3x-9)dx}{(x-1)(x+2)(x^2+1)} \\ &= -1 \int \frac{dx}{x-1} + \int \frac{dx}{x+2} + 3 \int \frac{dx}{x^2+1} \\ &= -\log|x-1| + \log|x+2| + 3 \tan^{-1}x + c \\ &= \log \left| \frac{x+2}{x-1} \right| + 3 \tan^{-1}x + c \end{aligned}$$

20. $\frac{x^3}{(x-1)(x-2)}$

தீர்வு : $I = \int \frac{x^3}{(x-1)(x-2)} dx = \int \frac{x^3}{x^2-3x+2} dx$

$$\begin{array}{r} x^3-3x^2+2x \\ (-) \frac{3x^2-9x+6}{7x-6} \end{array}$$

$$\therefore \frac{x^3}{(x-1)(x-2)} = x+3 + \frac{7x-6}{x^2-3x+2} \dots (1)$$

$$\frac{7x-6}{(x-1)(x-2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} \text{ என்க}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} x=1 \text{ எனில் } A=-1 \\ 7x-6 = A(x-2) + B(x-1) \end{array}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} x=2 \text{ எனில் } 8=B \\ \therefore \frac{7x-6}{(x-1)(x-2)} = \frac{-1}{x-1} + \frac{8}{x-2} \end{array}$$

இம்மதிப்பை (1) -ல் பிரதியிட

$$\frac{x^3}{(x-1)(x-2)} = x+3 + \frac{-1}{x-1} + \frac{8}{x-2}$$

$$\begin{aligned} \therefore I &= \int \frac{x^3 dx}{(x-1)(x-2)} \\ &= \int (x+3) dx + \int \frac{-1}{x-1} dx + 8 \int \frac{dx}{x-2} \\ &= \frac{x^2}{2} + 3x - \log|x-1| + 8 \log|x-2| + c \end{aligned}$$

பயிற்சி 11.6

கீழ்க்காண்பவற்றைத் தொகையிடுக.

1. $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

தீர்வு : $I = \int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx$ என்க

$$u = 1+x^2 \Rightarrow du = 2x dx \Rightarrow \frac{du}{2} = x dx$$

$$\begin{aligned} \therefore I &= \int \frac{\frac{du}{2}}{\sqrt{u}} = \frac{1}{2} \int \frac{du}{\sqrt{u}} = \frac{1}{2} \int u^{-\frac{1}{2}} du = \frac{1}{2} \frac{u^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + c \\ &= \frac{1}{2} \frac{u^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + c = \sqrt{u} + c = \sqrt{1+x^2} + c \quad [\because u = 1+x^2] \end{aligned}$$

2. $\frac{x^2}{1+x^6}$

தீர்வு : $I = \int \frac{x^2}{1+x^6} dx$ என்க

$$\therefore I = \int \frac{x^2}{1+(x^3)^2} dx$$

$$u = x^3 \Rightarrow du = 3x^2 dx \Rightarrow \frac{du}{3} = x^2 dx$$

$$\begin{aligned} \therefore I &= \int \frac{\frac{du}{3}}{1+u^2} = \frac{1}{3} \int \frac{du}{1+u^2} = \frac{1}{3} \tan^{-1}(u) + c \\ &= \frac{1}{3} \tan^{-1}(x^3) + c \quad [\because u = x^3] \end{aligned}$$

3. $\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

தீர்வு : $I = \int \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} dx$ என்க

$$u = e^x + e^{-x}$$

$$\Rightarrow du = (e^x - e^{-x}) dx$$

$$\therefore I = \int \frac{du}{u} = \log|u| + c = \log|e^x + e^{-x}| + c$$

4. $\frac{10x^9 + 10^x \log_e 10}{10^x + x^{10}}$

தீர்வு : $I = \int \frac{10x^9 + 10^x \log_e 10}{10^x + x^{10}} dx$

$$\therefore u = 10^x + x^{10}$$

$$\Rightarrow du = (10x^9 + 10^x \log_e 10) dx$$

$$\therefore I = \int \frac{du}{u} = \log|u| = \log|10^x + x^{10}| + c$$

12

நிகழ்தகவு கோட்பாடு - ஓர் அறிமுகம் (Introduction to Probability Theory)

புத்தக வினாக்கள்

பயிற்சி 12.1

1. பின்வரும் ஒன்றையொன்று விலக்கிய A, B, C, மற்றும் D என்ற நான்கு நிகழ்ச்சிகளை மட்டும் கொண்ட ஒரு சோதனையின் நிகழ்ச்சிகளின் நிகழ்தகவுகள் சாத்தியமானவையா எனத் தீர்மானிக்கவும்.

(i) $P(A) = 0.15$, $P(B) = 0.30$, $P(C) = 0.43$, $P(D) = 0.12$

(ii) $P(A) = 0.22$, $P(B) = 0.38$, $P(C) = 0.16$, $P(D) = 0.34$

(iii) $P(A) = \frac{2}{5}$, $P(B) = \frac{3}{5}$, $P(C) = -\frac{1}{5}$, $P(D) = \frac{1}{5}$

தீர்வு :

(i) $P(A) = 0.15$, $P(B) = 0.30$, $P(C) = 0.43$, $P(D) = 0.12$

$P(A) = 0.15$, $P(B) = 0.30$,

$P(C) = 0.43$, $P(D) = 0.12$

$P(A), P(B), P(C)$ மற்றும் $P(D) \geq 0$

மேலும் $P(S) = P(A) + P(B) + P(C) + P(D)$

$= 0.15 + 0.30 + 0.43 + 0.12 = 1$

$\therefore$ நிகழ்தகவு சாத்தியம்.

(ii) $P(A) = 0.22$, $P(B) = 0.38$, $P(C) = 0.16$, $P(D) = 0.34$

$P(A) = 0.22 \geq 0$, $P(B) = 0.38 \geq 0$,

$P(C) = 0.16 \geq 0$ மற்றும் $P(D) = 0.34 \geq 0$ மேலும்

$P(S) = 0.22 + 0.38 + 0.16 + 0.34 = 1.1 \neq 1$

$\therefore$ நிகழ்தகவு சாத்தியமில்லை.

(iii) $P(A) = \frac{2}{5}$, $P(B) = \frac{3}{5}$, $P(C) = -\frac{1}{5}$, $P(D) = \frac{1}{5}$

$P(C) = -\frac{1}{5}$

$\therefore$ நிகழ்தகவு சாத்தியமில்லை.

2. இரண்டு நாணயங்கள் ஒரே சமயத்தில் சுண்டப்படுகின்றன.

(அ) ஒரு தலை மற்றும் ஒரு பூ

(ஆ) அதிகபட்சமாக இரு பூ கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவுகளைக் காண்க.

தீர்வு : (அ) $S = \{HH, HT, TH, TT\}$

$\Rightarrow n(S) = 4$

A - ஒரு தலை ஒரு பூ விழும் நிகழ்ச்சி என்க.

$\therefore A = \{HT, TH\}$

$\Rightarrow n(A) = 2$

$\therefore P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

(ஆ) B அதிகபட்சமாக இரு பூ கிடைக்கும் நிகழ்ச்சி

$\therefore B = \{HH, HT, TH, TT\}$

$\therefore n(B) = 4$

$\therefore P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{4}{4} = 1$

3. ஒரு பெட்டியில் 5 மாம்பழங்களும் 4 ஆப்பிள் பழங்களும் உள்ளன. சமவாய்ப்பு முறையில் இரண்டு பழங்கள் எடுக்கப்பட்டால் (i) ஒரு மாம்பழம் ஒரு ஆப்பிள் பழமும் (ii) இரண்டும் ஒரே வகையைச் சார்ந்ததாகவும் கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவுகளைக் காண்க.

தீர்வு : $S = \{5 \text{ மாம்பழங்கள், } 4 \text{ ஆப்பிள்கள்}\}$

$\Rightarrow n(S) = {}^9C_2$ [$\because$ இரு பழங்கள்

9 பழங்களிலிருந்து எடுக்கப்படுகின்றன]

- (i) A (1 மாம்பழமும் 1 ஆப்பிள் பழமும் எடுக்கும் நிகழ்ச்சி)

$\therefore n(A) = {}^5C_1 \times {}^4C_1 = 5 \times 4 = 20$

$\therefore P(A) = \frac{20}{{}^9C_2} = \frac{20}{\frac{9 \times 8}{2 \times 1}} = \frac{20 \times 2}{9 \times 8} = \frac{5}{9}$

$$\therefore n(S) = 7, n(A) = 1$$

$$\therefore P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{1}{7}$$

சமவாய்ப்பு முறையில்

$$\text{சாதாரண வருட நிகழ்தகவு} = \frac{3}{4}$$

$$\text{லீப் வருட நிகழ்தகவு} = \frac{1}{4}$$

$\therefore$ தேவையான நிகழ்தகவு

$$= \frac{3}{4} \times \frac{1}{7} + \frac{1}{4} \times \frac{2}{7} = \frac{3}{28} + \frac{2}{28} = \frac{5}{28}$$

(ii) ஒரு லீப் வருடத்தில் 53 ஞாயிற்றுக்கிழமைகள் கிடைப்பது.

$$\text{ஒரு லீப் வருடத்தின் 366 நாட்கள்} \\ = 52 \text{ வாரங்கள்} + 2 \text{ நாட்கள்}$$

அந்த மீதி 2 நாட்கள் ஞாயிறு & திங்கள், திங்கள் & செவ்வாய், செவ்வாய் & புதன், புதன் & வியாழன், வியாழன் & வெள்ளி, வெள்ளி & சனி, சனி & ஞாயிறு என்ற 7 நிகழ்வுகளாக இருக்கும் நிகழ்வு B-ஞாயிற்றுக்கிழமை வரும் நிகழ்வு.

$$\therefore n(S) = 7, n(B) = 2$$

$$\therefore P(B) = \frac{2}{7}$$

லீப் வருடத்தில் 53 ஞாயிற்றுக்கிழமைகள் வருவதற்கான நிகழ்தகவு

$$= \frac{1}{4} \times \frac{2}{7} = \frac{1}{14}$$

12. ஒரு இலக்கை குறிபார்த்து சுடும் போது 4 ல் 3 முறை X-ம், 5 இல் 4 முறை Y-ம், 3-ல் 2 முறை Z-ம் சரியாக இலக்கைச் சுடுகின்றனர். மூவரும் அந்த இலக்கைச் சுடும்போது சரியாக இருவர் மட்டுமே சுடுவதற்கான நிகழ்தகவு யாது?

$$\text{தீர்வு : } P(X \text{ சுடும் நிகழ்தகவு}) = P(X) = \frac{3}{4}$$

$$\therefore P(\bar{X}) = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$

$$P(Y \text{ சுடும் நிகழ்தகவு}) = P(Y) = \frac{4}{5}$$

$$\Rightarrow P(\bar{Y}) = 1 - \frac{4}{5} = \frac{1}{5}$$

$$P(Z \text{ சுடும் நிகழ்தகவு}) = P(Z) = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow P(\bar{Z}) = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

P (இருவர் மட்டும் சரியாக சுடும் நிகழ்தகவு)

$$= P(X \cap Y \cap \bar{Z}) + P(X \cap \bar{Y} \cap Z) + P(\bar{X} \cap Y \cap Z)$$

$$= P(X).P(Y).P(\bar{Z}) + P(X).P(\bar{Y}).P(Z) + P(\bar{X}).P(Y).P(Z)$$

$$= \frac{3}{4} \times \frac{4}{5} \times \frac{1}{3} + \frac{3}{4} \times \frac{1}{5} \times \frac{2}{3} + \frac{1}{4} \times \frac{4}{5} \times \frac{2}{3}$$

$$= \frac{12}{60} + \frac{6}{60} + \frac{8}{60} = \frac{12+6+8}{60} = \frac{26}{60} = \frac{13}{30}$$

பயிற்சி 12.4

1. ஒரு தொழிற்சாலையில் இயந்திரங்கள் I மற்றும் II என இருவகை உள்ளன. இயந்திரம்-I தொழிற்சாலையின் உற்பத்தியில் 60% தயாரிக்கிறது மற்றும் இயந்திரம் -II உற்பத்தியில் 40% தயாரிக்கிறது. மேலும் இயந்திரம்-I-ன் மூலம் உற்பத்தி செய்யப்பட்ட பொருட்களில் 2% குறைபாடுள்ளதாகவும் இயந்திரம்-II-ன் மூலம் உற்பத்தி செய்யப்பட்ட பொருட்களில் 4% குறைபாடு உள்ளதாகவும் இருக்கின்றன. உற்பத்தி செய்யப்பட்ட பொருட்களிலிருந்து, சமவாய்ப்பு முறையில் ஒரு பொருள் தேர்ந்தெடுக்கப்படுகிறது. அப்பொருள் குறைபாடுடன் இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு யாது?

தீர்வு : A_1 - இயந்திரம்- I தயாரிக்கும் பொருட்கள் என்க.

A_2 - இயந்திரம்- II தயாரிக்கும் பொருட்கள் என்க

B குறைபாடுடைய பொருட்களை பெறும் நிகழ்வு என்க.

$$P(A_1) = \frac{60}{100} \quad P(B/A_1) = \frac{2}{100}$$

$$P(A_2) = \frac{40}{100} \quad P(B/A_2) = \frac{4}{100}$$

A_1, A_2 ஒன்றையொன்று விலக்கும் நிகழ்ச்சிகள். B-ன் நிகழ்தகவு காண வேண்டும் எனில்

$$P(B) = P(A_1).P(B/A_1) + P(A_2).P(B/A_2)$$

$$P(B) = \frac{60}{100} \times \frac{2}{100} + \frac{40}{100} \times \frac{4}{100}$$

$$P(B) = \frac{120}{10000} + \frac{160}{10000} = \frac{280}{10000}$$

$$P(B) = 0.028$$

2. ஒத்த இரு ஜாடிகளில், ஒன்றில் 6 கருப்பு மற்றும் 4 சிவப்பு நிறப்பந்துகள் உள்ளன. மற்றொரு ஜாடியில் 2 கருப்பு மற்றும் 2 சிவப்பு நிறப்பந்துகள் உள்ளன. சமவாய்ப்பு முறையில் ஒரு ஜாடி தேர்ந்தெடுக்கப்பட்டு அதிலிருந்து ஒரு பந்து எடுக்கப்படுகிறது.

(i) அப்பந்து கருப்பாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவைக் காண்க.

(ii) எடுக்கப்பட்ட பந்து கருப்பு எனில் முதல் ஜாடியிலிருந்து எடுக்கப்பட்டதற்கான நிகழ்தகவு யாது?

11

ஆம் வகுப்பு

அரசு மாதிரி வினாத்தாள் - 2019 பதிவு எண்

கணிதவியல்

மொத்த மதிப்பெண்கள்: 90

கால அளவு : 15 நிமிடம் + 2.30 மணி

பிரிவு - I

குறிப்பு : (i) அனைத்து வினாக்களுக்கும் விடையளிக்கவும்

$$20 \times 1 = 20$$

(ii) கொடுக்கப்பட்ட நான்கு விடைகளில் மிகவும் ஏற்புடைய விடையினை தேர்ந்தெடுத்து, குறியீட்டுடன் விடையினையும் சேர்த்து எழுதுக.

1. A மற்றும் B எனும் இரு கணங்களில் 17 உறுப்புகள் பொதுவானவை எனில், $A \times B$ மற்றும் $B \times A$ ஆகிய கணங்களில் உள்ள பொது உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை
(1) 2^{17} (2) 17^2 (3) 34
(4) போதுமான தகவல் இல்லை
2. $\mathbb{R}$ என்பது மெய்யெண்களின் கணம் மற்றும் $f: \mathbb{R} - \{3\} \rightarrow \mathbb{R}$ என்பது $f(x) = \frac{3+x}{3-x}, x \in \mathbb{R} - \{3\}$ என வரையறுக்கப்பட்டுள்ளது எனில், f -ன் வீச்சகம்
(1) $\mathbb{R}$ (2) $\mathbb{R} - \{1\}$
(3) $\mathbb{R} - \{-1\}$ (4) $\mathbb{R} - \{-3\}$
3. $2x^2 + (a-3)x + 3a - 5 = 0$ என்ற சமன்பாட்டில் மூலங்களின் கூடுதல் மற்றும் பெருக்கற்பலன் ஆகியவை சமம் எனில், a - ன் மதிப்பு
(1) 1 (2) 2 (3) 0 (4) 4
4. பின்வருவனவற்றுள் எது மெய்யல்ல?
(1) $|\sin(x)| \leq 1$
(2) $|\sec(x)| < 1$
(3) $|\cos(x)| \leq 1$
(4) $\operatorname{cosec}(x) \geq 1$ அல்லது $\operatorname{cosec}(x) \leq -1$
5. $\cos 1^\circ + \cos 2^\circ + \cos 3^\circ + \dots + \cos 179^\circ$ -ன் மதிப்பு
(1) 0 (2) 1 (3) -1 (4) 89
6. எந்த இரண்டு கோடுகளுக்கும் இணையாக இல்லாமலும் மற்றும் எந்த மூன்று கோடுகளும் ஒரு புள்ளியில் வெட்டிக்கொள்ளாமலும் இருக்குமாறு ஒரு தளத்தின் மீது 10 நேர்க்கோடுகள் வரையப்பட்டால், கோடுகள் வெட்டிக்கொள்ளும் புள்ளிகளின் மொத்த எண்ணிக்கை
(1) 45 (2) 40 (3) $10!$ (4) 2^{10}

7. $2^{2020} - 15$ - ஆல் வகுக்க கிடைக்கும் மீதி
(1) 4 (2) 8 (3) 1 (4) 2
8. இரு மிகை எண்களின் கூட்டுச் சராசரி மற்றும் பெருக்குச் சராசரி முறையே 16 மற்றும் 8 எனில், அவற்றின் இசைச் சராசரி
(1) 10 (2) 6 (3) 5 (4) 4
9. $ax + by + c = 0$ என்ற நேர்க்கோட்டின் சமன்பாட்டில் a, b, c என்பன கூட்டுத்தொடரில் உள்ளன எனில் நேர்க்கோட்டின் மீது உள்ள புள்ளி
(1) (1,2) (2) (1, -2)
(3) (2, -1) (4) (2, 1)
10. $x + (2k-7)y + 3 = 0$ மற்றும் $3kx + 9y - 5 = 0$ என்ற இரு கோடுகள் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தானவை எனில், k -ன் மதிப்பு
(1) 3 (2) $\frac{1}{3}$ (3) $\frac{2}{3}$ (4) $\frac{3}{2}$
11. $|\vec{a}| = 13, |\vec{b}| = 5$ மற்றும் $\vec{a} \cdot \vec{b} = 60^\circ$ எனில் $|\vec{a} \times \vec{b}|$ - ன் மதிப்பு
(1) 15 (2) 35 (3) 45 (4) 25
12. ஒரு வெக்டர் $\vec{OP}$ ஆனது x மற்றும் y அச்சுகளின் மிகை திசையில் முறையே 60° மற்றும் 45° ஐ ஏற்படுத்துகின்றது. $\vec{OP}$ ஆனது z - அச்சுடன் ஏற்படுத்தும் கோணம்
(1) 45° (2) 60° (3) 90° (4) 30°
13. $\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$ மற்றும் $2\hat{i} + \hat{j} + 3\hat{k}$ ஆகிய வெக்டர்களுக்கு செங்குத்தான வெக்டர்
(1) $2\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$ (2) $2\hat{i} - \hat{j} - \hat{k}$
(3) $3\hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k}$ (4) $3\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}$
14. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin |x|}{x}$ - ன் மதிப்பு
(1) 1 (2) -1
(3) 0 (4) மதிப்பு இல்லை
15. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ என்பது $f(x) = \lfloor x-3 \rfloor + |x-4|, x \in \mathbb{R}$, என வரையறுக்கப்பட்டால் $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ ன் மதிப்பு
(1) -2 (2) -1 (3) 0 (4) 1

11 ஆம்
வகுப்பு

அரையாண்டு பொதுத்தேர்வு - 2019

கணிதம்

பதிவு எண்

--	--	--	--

நேரம் : 2.30 மணி

[மொத்த மதிப்பெண்கள் : 90]

அறிவுரை :

1. அனைத்து வினாக்களுக்கும் சரியாக பதிவாகி உள்ளதா என்பதனைச் சரி பார்த்து கொள்ளவும். அச்சுப்பதிவில் குறையிருப்பின் அறைக் கண்காணிப்பாளரிடம் உடனடியாகத் தெரிவிக்கவும்.
2. நீலம் அல்லது கருப்பு மையினை மட்டுமே எழுதுவதற்கும், அடிக்கோடுவதற்கும் பயன்படுத்த வேண்டும். படங்கள் வரைவதற்கு பென்சில் பயன்படுத்தவும்.

பகுதி - I

- குறிப்பு : (i) அனைத்து வினாக்களுக்கும் விடையளிக்கவும் **$20 \times 1 = 20$**
- (ii) கொடுக்கப்பட்ட மாற்று விடைகளில் மிகவும் ஏற்புடைய விடையினை தேர்ந்தெடுத்து, குறியீட்டுடன் விடையினையும் சேர்த்து எழுதுக.

1. $A = \{(x, y): y = e^x, x \in \mathbb{R}\}$ மற்றும் $B = \{(x, y) : y = e^{-x}, x \in \mathbb{R}\}$ எனில், $n(A \cap B)$ என்பது
(a) ∞ (b) 0 (c) 1 (d) 2
2. m உறுப்புகள் கொண்ட ஒரு கணத்திலிருந்து n உறுப்புகள் கொண்ட ஒரு கணத்திற்கு வரையறுக்கப்படும் மாறிலிச் சார்புகளின் எண்ணிக்கை
(a) mn (b) m (c) n (d) $m + n$
3. $f(x) = |x| - x, x \in \mathbb{R}$ என்ற சார்பின் வீச்சகம்
(a) $[0, 1]$ (b) $[0, \infty)$ (c) $[0, 1)$ (d) $(0, 1)$
4. $x^2 - kx + 16 = 0$ என்ற சமன்பாட்டில் மூலங்கள் a மற்றும் b ஆகியவை $a^2 + b^2 = 32$ - ஐ நிறைவு செய்யும் எனில் k -ன் மதிப்பு
(a) 10 (b) -8 (c) -8,8 (d) 6
5. $\frac{kx}{(x+2)(x-1)} = \frac{2}{x+2} + \frac{1}{x-1}$ எனில், k -ன் மதிப்பு
(a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) 4
6. $\cos 1^\circ + \cos 2^\circ + \cos 3^\circ + \dots + \cos 179^\circ =$
(a) 0 (b) 1 (c) -1 (d) 89
7. $\sin \alpha + \cos \alpha = b$ எனில், $\sin 2\alpha$ இன் மதிப்பு
(1) $b \leq \sqrt{2}$ எனில், $b^2 - 1$
(2) $b > \sqrt{2}$ எனில், $b^2 - 1$
(3) $b \geq 1$, எனில் $\Rightarrow b^2 - 1$
(4) $b \geq \sqrt{2}$ எனில், $b^2 - 1$

8. e^{-2x} என்ற தொடரில் x^5 -ன் கெழு
(a) $\frac{2}{3}$ (b) $\frac{3}{2}$ (c) $-\frac{4}{15}$ (d) $\frac{4}{15}$
9. $\frac{x}{3} - \frac{y}{4} = 1$ என்ற கோட்டிற்கு ஆதியிலிருந்து செங்குத்துத் தொலைவு
(a) $\frac{11}{5}$ (b) $\frac{5}{12}$ (c) $\frac{12}{5}$ (d) $\frac{5}{-12}$
10. $9x^2 - 24xy + 16y^2 = 0$ என்ற சமன்பாடு குறிக்கும் கோடுகள் x - அச்சோடு உருவாக்கும் கோணங்கள் θ_1 மற்றும் θ_2 எனில் $\tan \theta_1 \tan \theta_2 =$
(a) $-\frac{9}{16}$ (b) $-\frac{16}{9}$ (c) $\frac{9}{16}$ (d) $\frac{16}{9}$
11. A என்பது ஒரு சதுர அணி எனில், பின்வருவனவற்றுள் எது சமச்சீரல்ல?
(a) $A + A^T$ (b) AA^T (c) $A^T A$ (d) $A - A^T$
12. $\vec{a} = \hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k}, |\vec{b}| = 5$ மேலும் $\vec{a}$ மற்றும் $\vec{b}$ -க்கு இடைப்பட்ட கோணம் $\frac{\pi}{6}$ எனில், இவ்விரு வெக்டர்களை அடுத்தடுத்த பக்கங்களாகக் கொண்ட முக்கோணத்தின் பரப்பு
(a) $\frac{7}{4}$ (b) $\frac{15}{4}$ (c) $\frac{3}{4}$ (d) $\frac{17}{4}$
13. $\vec{i} - \vec{j}, \vec{j} - \vec{k}, \vec{k} - \vec{i}$ வெக்டர்கள் என்பது :
(1) ஒன்றுக்கொன்று இணை
(2) அலகு வெக்டர்கள்
(3) ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்து வெக்டர்கள்
(4) ஒரு தள வெக்டர்கள்
14. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 - \cos 2x}}{x}$
(a) 0 (b) 1
(c) 2 (d) இவற்றில் ஏதுமில்லை

[351]

11 ஆம்
வகுப்பு

பொதுத்தேர்வு மார்ச் - 2020

கணிதம் (விடைகளுடன்)

பதிவு எண்

--	--	--	--

நேரம் : 3.00 மணி

மொத்த மதிப்பெண்கள் : 90

அறிவுரைகள் :

1. அனைத்து வினாக்களுக்கும் சரியாக பதிவாகி உள்ளதா என்பதனைச் சரி பார்த்து கொள்ளவும். அச்சுப்பதிவில் குறையிருப்பின் அறைக் கண்காணிப்பாளரிடம் உடனடியாகத் தெரிவிக்கவும்.
2. **நீலம்** அல்லது **கருப்பு** மையினை மட்டுமே எழுதுவதற்கும், அடிகோடுவதற்கும் பயன்படுத்த வேண்டும். படங்கள் வரைவதற்கு பென்சில் பயன்படுத்தவும்.

பகுதி - I

குறிப்பு : (i) அனைத்து வினாக்களுக்கும் விடையளிக்கவும் **20 × 1 = 20**

(ii) கொடுக்கப்பட்ட மாற்று விடைகளில் மிகவும் ஏற்புடைய விடையினை தேர்ந்தெடுத்து, குறியீட்டுடன் விடையினையும் சேர்த்து எழுதுக.

1. $x = at^2, y = 2at$ எனில் $\frac{dy}{dx} =$
(அ) $-t$ (ஆ) $\frac{1}{t}$ (இ) $-\frac{1}{t}$ (ஈ) t
2. $\vec{a}$ - க்கும் $\vec{b}$ - க்கும் இடைப்பட்ட கோணம் 120° , மேலும் அவற்றின் எண்ணளவுகள் முறையே 2, $\sqrt{3}$ எனில் $\vec{a} \cdot \vec{b}$ ஆனது
(அ) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ (ஆ) $\sqrt{3}$ (இ) $-\sqrt{3}$ (ஈ) 2
3. $|\vec{a} + \vec{b}| = 60, |\vec{a} - \vec{b}| = 40$ மற்றும் $|\vec{b}| = 46$ எனில் $|\vec{a}|$ ன் மதிப்பு
(அ) 32 (ஆ) 42 (இ) 12 (ஈ) 22
4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - b^x}{x} =$
(அ) $\frac{a}{b}$ (ஆ) $\log ab$
(இ) $\log\left(\frac{a}{b}\right)$ (ஈ) $\log\left(\frac{b}{a}\right)$
5. A என்பது ஒரு சதுர அணி எனில், பின்வருவனவற்றுள் எது சமச்சீரல்ல?
(அ) $A - A^T$ (ஆ) $A + A^T$
(இ) AA^T (ஈ) $A^T A$

6. $f: [-3, 3] \rightarrow S$ என்ற சார்பு $f(x) = x^2$ என வரையறுக்கப்பட்டு மேற்கோர்த்தல் எனில்
(அ) $[0, 9]$ (ஆ) $[-9, 9]$
(இ) R (ஈ) $[-3, 3]$
7. $A = \{(x, y) : y = \sin x, x \in R\}$ மற்றும் $B = \{(x, y) : y = \cos x, x \in R\}$ எனில் $A \cap B$ ல்
(அ) தீர்மானிக்க இயலாது
(ஆ) உறுப்புகளில்லை
(இ) எண்ணிலடங்கா உறுப்புகள் உள்ளன
(ஈ) ஒரே ஒரு உறுப்பு உள்ளது
8. $f(x) = |x| + |x - 1|$ என்ற சார்பு
(அ) $x = 0, 1$ என்ற புள்ளிகளில் தொடர்ச்சியற்றது
(ஆ) $x = 0$ என்ற புள்ளியில் மட்டுமே தொடர்ச்சியானது
(இ) $x = 1$ என்ற புள்ளியில் மட்டுமே தொடர்ச்சியானது
(ஈ) $x = 0, x = 1$ என்ற புள்ளிகளில் தொடர்ச்சியானது
9. ${}^{2n}C_3 : {}^nC_3 = 11 : 1$ எனில் n -ன் மதிப்பு:
(அ) 7 (ஆ) 5 (இ) 6 (ஈ) 11
10. $\frac{\cos 6x + 6 \cos 4x + 15 \cos 2x + 10}{\cos 5x + 5 \cos 3x + 10 \cos x} =$
(அ) $2 \cos x$ (ஆ) $\cos 2x$ (இ) $\cos x$ (ஈ) $\cos 3x$
11. பத்து நாணயங்களைச் சுண்டும்போது குறைந்தது 8 தலைகள் கிடைப்பதற்கான நிகழ்வு
(அ) $\frac{7}{128}$ (ஆ) $\frac{7}{64}$ (இ) $\frac{7}{32}$ (ஈ) $\frac{7}{16}$
12. $y = -x$ என்ற கோட்டிற்கு (2, 3) என்ற புள்ளியில் பிம்பப் புள்ளி
(அ) (3, 2) (ஆ) (-3, -2)
(இ) (-3, 2) (ஈ) (-2, -3)