2022-23 EDITION

SURA'S 12TH STD SCHOOL GUIDES

Updated New Edition

Call @
9600175757
8124301000
orders@surabooks.com

Buy Online @ surabooks.com

This is Only for Sample for Full Book Order Online or Available at All Leading Bookstores

சுராவின்

கணிதவியல்

12 ஆம் வகுப்பு

புதிய பாடப்புத்தகத்தின்படி தயாரிக்கப்பட்டது

தொகுதி - I & II

சிறப்பம்சங்கள்

- பாட நூலில் உள்ள பயிற்சி வினாக்களுக்கு முழுமையான, எளிமையான தீர்வுகள் தரப்பட்டுள்ளன.
- ஒவ்வொரு பாடத்திற்கும் முக்கிய வரையறைகள் மற்றும் நினைவில் கொள்ள வேண்டிய சூத்திரங்கள் தரப்பட்டுள்ளன.
- அனைத்துப் பாடப்பகுதிகளிலும் மிகுதியான அளவில் கூடுதல் வினாக்கள் விடைகளுடன் தரப்பட்டுள்ளன.
- மாதிரி வினாத்தாள்கள் 1 முதல் 6 வரை **(பிடிஏ)** வினாக்கள் ஆங்காங்கே சுட்டிக்காட்டப்பட்டுள்ளன.
- அரசு மாதிரி வினாத்தாள் - 2019 **[அ.மா.வி -2019]**, காலாண்டுத் தேர்வு - 2019 **[QY-2019]**, அரையாண்டுத் தேர்வு - 2019 **[HY-2019]**, பொதுத்தேர்வு மார்ச் - 2020 **[மார்ச் - 2020]** மற்றும் அரசு துணைத்தேர்வு செப். 2020 & ஆகஸ்ட் 2021**[செப். - 2020 & ஆகஸ்ட் - 2021]** வினாக்கள் ஆங்காங்கே சுட்டிக்காட்டப்பட்டுள்ளன.
- அரசு துணைத் தேர்வு ஆகஸ்ட் - 2021 வினாத்தாள் விடைகளுடன் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

சுரா பப்ளிகேஷன்ஸ்

சென்னை

orders@surabooks.com PH:9600175757 / 8124301000

This is Only for Sample for Full Book Order Online or Available at All Leading Bookstores

2022-23 புதிய பதிப்பு
© வெளியீட்டாளர்கள்

ISBN : **978-93-92559-43-3**
குறியீட்டு எண் : SG 326

எழுதி வழங்கியவர்
திரு.G. செல்வராஜ் M.Sc., M.Ed., M.Phil. *சென்னை*

திருத்தியவர்
திரு.S. சதிஷ் M.Sc., M.Phil.

மதிப்பாளர்
திரு. S. நிரஞ்சன் B.Tech., (NITT) PGDM (IIM).
சென்னை

தலைமை அலுவலகம்:
1620, 'ஜே' பிளாக், 16-ஆவது பிரதான சாலை,
அண்ணா நகர், சென்னை-600 040.
☎ 044-4862 9977, 044-486 27755
81242 01000/ 81243 01000
e-mail : orders @surabooks.com
website : www.surabooks.com

Our Guides for XI Standard

- சுராவின் தமிழ் உரைநூல்
- Sura's Smart English
- Sura's Mathematics (EM/TM)
- Sura's Physics (EM/TM)
- Sura's Chemistry (EM/TM)
- Sura's Bio-Botany & Botany (EM/TM) (Short Version & Long Version)
- Sura's Bio-Zoology & Zoology (EM/TM) (Short Version & Long Version)
- Sura's Computer Science (EM/TM)
- Sura's Computer Applications (EM/TM)
- Sura's Commerce (EM/TM)
- Sura's Economics (EM/TM)
- Sura's Accountancy (EM/TM)
- Sura's Business Maths (EM)

பதிப்பாசிரியர் உரை

12ம் வகுப்பிற்கான சுராவின் **கணிதவியல்** வழிகாட்டியை வெளியிடுவதில் பெருமிதமும் மகிழ்ச்சியும் அடைகிறோம். **கணிதவியல்** பாடங்களுக்கான வினா விடைகள் மிகவும் எளிமையாக, சுலபமாக புரிந்துகொள்ளும் விதத்தில் தரப்பட்டுள்ளன.

சுராவின் **கணிதவியல்** வழிகாட்டி மாணவர்களின் எல்லாத் தேவைகளையும் கருத்தில் கொண்டு உருவாக்கப்பட்டுள்ளது. பாடநூலை நன்கு மதிப்பாய்வு செய்து மாணவர்கள் எல்லாப் பாடங்களையும் வெகுவாக உட்கிரகித்து அறிந்துகொண்டு தேர்வை சுலபமாக எழுதி அதிக மதிப்பெண்களைப் பெற்று வெற்றியாளர்களாகும் விதத்தில், நமது வெற்றிக்கான இந்த வழிகாட்டி தயாரிக்கப்பட்டுள்ளது.

ஆசிரியர்களுக்கு பாடம் நடத்துவதிலும், மாணவர்களுக்குக் கற்றுக்கொள்வதிலும் இந்த வழிகாட்டி துணையாக இருக்கும்.

அரசு பொதுத் தேர்வுக்கான **புதிய மதிப்பீட்டு முறையில் 100 மதிப்பெண்கள் வடிவமைப்பில், 90 மதிப்பெண்களுக்கான எழுத்துத் தேர்வின் வினாத்தாள் அடிப்படையில்** நமது வழிகாட்டி உருவாக்கப்பட்டுள்ளதால், தேர்வுகளை மிகச் சரியான விதத்தில் எதிர்கொள்ளலாம்.

நமது சுராவின் **கணிதவியல்** வழிகாட்டியில் இது போன்ற பல சிறப்பம்சங்கள் அடங்கியிருந்தாலும், **கணிதவியல்** பாடத்தை மாணவர்கள் புரிந்துகொள்ள உதவிடும் ஆசிரியர்களின் பணியும் மகத்தானது என்பதை மறுப்பதற்கில்லை.

ஆசிரியர்களின் கற்றுத்தரும் பணியில் உறுதுணையாகவும், மாணவர்கள் பாடங்களைக் கற்கும் விதத்தில் ஊக்கம் தரும் வகையிலும் நமது வழிகாட்டி திகழும் என நம்புகிறோம்.

இறையருளை வேண்டுகிறோம்.

நலமே விளைக!

சுபாஷ் ராஜ், B.E., M.S.,
- பதிப்பகத்தார்

வாழ்த்துக்கள் !!!

மேலும் விவரங்களுக்கு / தொடர்புக்கு

புத்தகத்தில் உள்ள சந்தேகங்களுக்கு	:	enquiry@surabooks.com
புத்தகங்கள் வாங்க	:	orders@surabooks.com
தொடர்புக்கு	:	80562 94222 / 80562 15222
வாட்ஸ்அப்	:	8124201000 / 9840926027
ஆன்லைன் வலைதளம்	:	www.surabooks.com

பாடக் குறிப்புகளின் தொகுக்கப்பட்ட பகுதிகளை எமது http://tnkalvi.in இணையதளத்திலிருந்து இலவசமாக பதிவிறக்கிக்கொள்ளலாம்

22-12-2021

orders@surabooks.com PH:9600175757 / 8124301000

www.surabooks.com

This is Only for Sample for Full Book Order Online or Available at All Leading Bookstores

பொருளடக்கம்

தொகுதி - I

அத்தியாயம்	பாடத் தலைப்புகள்	பக்க எண்
1.	அணிகள் மற்றும் அணிக்கோவைகளின் பயன்பாடுகள்	1 - 44
2.	கலப்பு எண்கள்	45 - 80
3.	சமன்பாட்டியல்	81 - 104
4.	நேர்மாறு முக்கோணவியல் சார்புகள்	105 - 132
5.	இரு பரிமாண பகுமுறை வடிவியல் - II	133 - 174
6.	வெக்டர் இயற்கணிதத்தின் பயன்பாடுகள்	175 - 226

தொகுதி - II

அத்தியாயம்	பாடத் தலைப்புகள்	பக்க எண்
7.	வகை நுண்கணிதத்தின் பயன்பாடுகள்	227- 278
8.	வகையீடுகள் மற்றும் பகுதி வகைக்கெழுக்கள்	279 - 306
9.	தொகை நுண்கணிதத்தின் பயன்பாடுகள்	307 - 342
10.	சாதாரண வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகள்	343 - 382
11.	நிகழ்தகவு பரவல்கள்	383 - 412
12.	தனிநிலைக் கணிதம்	413 - 430
அரசு துணைத் தேர்வு ஆகஸ்ட் - 2021 வினாத்தாள் விடைகளுடன் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.		431 - 444

orders@surabooks.com PH:9600175757 / 8124301000

This is Only for Sample for Full Book Order Online or Available at All Leading Bookstores

அத்தியாயம்

1

அணிகள் மற்றும் அணிக்கோவைகளின் பயன்பாடுகள்

முக்கிய வரையறைகள்

- $|A| \neq 0$, எனில் A ஒரு பூச்சியமற்ற கோவை அணி மற்றும் $y\,|A| = 0$, எனில் A ஒரு பூச்சியக்கோவை அணி.
- A–ன் இணைக்காரணி அணியின் நிரை நிரல் மாற்று அணி A–ன் சேர்ப்பு அணி என வரையறுக்கப்படுகிறது (adj A).
- $AB = BA = I_n$, எனில் அணி B A-ன் நேர்மாறு அணி எனப்படும்.
- ஒரு சதுர அணிக்கு நேர்மாறு இருப்பின் அது ஒருமைத்தன்மை வாய்ந்ததாகும்.
- A ஒரு பூச்சியமற்றக் கோவை அணி எனில் மட்டுமே A^{-1} காண இயலும்.
- பூச்சியக் கோவை அணிக்கு நேர்மாறு காண இயலாது.
- A என்பது பூச்சியமற்றக் கோவை அணி மற்றும் $AB = AC$ எனில், $B = C$ (இடது நீக்கல் விதி).
- A என்பது பூச்சியமற்ற கோவை அணி மற்றும் $BA = CA$ எனில், $B = C$ (வலது நீக்கல் விதி).
- A மற்றும் B என்பன n, வரிசையுடைய பூச்சியமற்ற கோவை அணிகள் எனில் (adj AB) = (adj B) (adj A)
- ஒரு சதுர அணி A-க்கு $AA^T = A^TA = I$ எனில், A ஆனது செங்குத்து அணி எனப்படும்.
- A, B என்ற இரு ஒரே வரிசையுடைய அணிகளில் ஏதாவது ஓர் அணியை தொடக்கநிலை உருமாற்றங்கள் மூலம் மற்ற அணியாகப் பெற முடியுமெனில், Aயும் Bயும் சமான அணிகள் என்றழைக்கப்படும் $(A \sim B)$.
- ஓர் அணியில் அனைத்து பூச்சிய நிரைகளும் அணியின் அடிப்பகுதி நிரைகளாக அமைந்து, எந்தவொரு கீழ்வரிசை – நிரையின் முதல் பூச்சியமற்ற உறுப்பானது அந்நிரைக்கு மேலாக அமைந்து நிரைகள் ஒவ்வொன்றின் முதல் பூச்சியமற்ற உறுப்பிற்கு வலதுபுறமாக அமைந்தால் அவ்வணியானது நிரை – ஏறுபடி வடிவில் இருக்கும்.
- ஓர் அணி A- இன் தரம் என்பது அதன் பூச்சியமற்ற சிற்றணிக் கோவையின் உச்ச வரிசையாகும் $[\rho(A)]$.
- நிரை ஏறுபடி வடிவிலுள்ள ஓர் அணியின் அணித்தரம் அப்பூச்சிய நிரைகளின் எண்ணிக்கையாகும்.
- ஓர் அலகு அணியில் ஒரே ஒரு தொடக்க நிலை உருமாற்றத்தினால் கிடைக்கும் அணியை தொடக்க நிலை அணி என வரையறுக்கப்படுகிறது. ஒரு வரிசைக்கிரமமான தொடக்கநிலைச் செயலிகளைக் கொண்டு ஒவ்வொரு பூச்சியமற்ற கோவை அணியினை ஓர் அலகு அணியாக உருமாற்றம் செய்யலாம்.
- ஒரு நேரியச் சமன்பாட்டுத் தொகுப்பானது குறைந்தது ஒரு தீர்வு பெற்றிருந்தால், தொகுப்பானது ஒருங்கமைவுடையது எனப்படும்.
- ஒரு தீர்வு கூட பெறவில்லையெனில் தொகுப்பானது ஒருங்கமைவற்றது எனப்படும்.

orders@surabooks.com PH:9600175757 / 8124301000

This is Only for Sample for Full Book Order Online or Available at All Leading Bookstores

நினைவில் கொள்ள வேண்டிய சூத்திரங்கள்

✦ a_{ij} -ன் இணைக்காரணி $A_{ij} = (-1)^{i+j} a_{ij}$, இதை M_{ij} -ன் சிற்றணிக்கோவை M_{ij}.

✦ ஒவ்வொரு n வரிசையுடைய சதுர அணி A–விற்கும், $A(\text{adj } A) = (\text{adj } A)A = |A|\, I_n$.
$AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$

✦ A என்பது பூச்சியமற்றக் கோவை அணி எனில்

(i) $|A^{-1}| = \dfrac{1}{|A|}$

(ii) $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

(iii) $(\lambda A^{-1}) = \dfrac{1}{\lambda} A^{-1}$ இங்கு λ என்பது பூச்சியமற்ற திசையிலி.

நேர்மாறுகளின் வரிசை மாற்று விதி :

✦ $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ இங்கு A மற்றும் B என்பன பூச்சியமற்ற கோவை அணிகள் ஒரே வரிசையுடையவைகள்

✦ இரட்டிப்பு நேர்மாறு விதி
A என்பது பூச்சியமற்றக் கோவை அணி எனில் A^{-1} யும் பூச்சியமற்ற கோவை அணி மற்றும் $(A^{-1})^{-1} = A$.

✦ A என்பது n வரிசையுடைய பூச்சியமற்றக் கோவை அணி எனில்,

(i) $(\text{adj } A)^{-1} = \text{adj } (A^{-1}) = \dfrac{1}{|A|} \cdot A$

(ii) $|\text{adj } A| = |A|^{n-1}$

(iii) $\text{adj } (\text{adj } A) = |A|^{n-2} A$

(iv) $\text{adj } (\lambda A) = \lambda^{n-1} \text{adj } (A)$ இங்கு λ என்பது பூச்சியமற்ற திசையிலி

(v) $|\text{adj } (\text{adj } A)| = |A|^{(n-1)^2}$

(vi) $(\text{adj } A)^T = \text{adj } (A^T)$

✦ ஓர் அணியில் குறைந்தது ஒரு பூச்சியமற்ற உறுப்பு இருப்பின் $\rho(a) \geq 1$.

✦ அலகு அணி I_n -ன் தரம் n ஆகும்.

✦ A-ன் வரிசை $m \times n$ எனில் $\rho(A) \leq \{m, n\}$- ன் மீச்சிறு.

✦ n வரிசையுடைய ஒரு சதுர அணிக்கு நேர்மாறு காணத் தேவையான மற்றும் போதுமான நிபந்தனை $\rho(A) = n$.

✦ தொடக்க நிலைச் செயலிகள் மூலம் A என்ற பூச்சியமற்றக் கோவை அணியை, I_n வடிவத்திற்கு உருமாற்றுவது காஸ் ஜோர்டன் முறையாகும்.

நேர்மாறு அணி காணல் முறை :

✦ $AX = B$ க்கான தீர்வு $X = A^{-1}B$ இங்கு A மற்றும் B ஒரே வரிசையுடைய சதுர அணிகள் மற்றும் பூச்சியக் கோவை அணி.

கிராமரின் விதி :

✦ $\Delta = 0$, எனில் கிராமரின் விதியை பயன்படுத்த இயலாது, $x_1 = \dfrac{\Delta_1}{\Delta}, x_2 = \dfrac{\Delta_2}{\Delta}, x_3 = \dfrac{\Delta_3}{\Delta}$

காஸ்ஸியன் நீக்கல் முறை :

நேரியச் சமன்பாடுகளின் தொகுப்பின் விரிவுப்படுத்தப்பட்ட அணியை ஏறுபடி வடிவத்திற்கு உருமாற்றி பின்பு பின்னோக்கிப் பிரதியிடல் மூலம் தீர்வு காண்பதாகும்.

ரூச்சி - கபெல்லி தேற்றம் :

$AX = B$ என்ற சமன்பாடுகளின் தொகுப்பானது ஒருங்கமைவு உடையதற்கு $\rho(A) = \rho([A|B])$ எனில் மட்டும்.

(i) $\rho(A) = \rho([A|B]) = n$, மாறிகளில் எண்ணிக்கை, தொகுப்பானது ஒருங்கமைவு உடையது மற்றும் ஒரே தீர்வை கொண்டிருக்கும்.

(ii) $\rho(A) = \rho([A|B]) = n - k$, $k \neq 0$ எனில் தொகுப்பு ஒருங்கமைவு உடையது மற்றும் எண்ணிக்கையற்ற தீர்வுகளை கொண்டிருக்கும்.

(iii) $\rho(A) \neq \rho([A|B])$, எனில் தொகுப்பு ஒருங்கமைவு அற்றது மற்றும் தீர்வு இல்லை.

சமப்படித்தான நேரியச் சமன்பாடுகள் தொகுப்பு :

(i) $\rho(A) = \rho([A|B]) = n$, தொகுப்பு ஒரே ஒரு தீர்வை கொண்டிருக்கும், அது வெளிப்படையான தீர்வாகும், $|A| \neq 0$.

(ii) $\rho(A) = \rho([A|O]) < n$, வெளிப்படையற்ற தீர்வுகளை கொண்டிருக்கும்.
வெளிப்படையற்ற தீர்வுக்கு, $|A| = 0$.

✦ $A^{-1} = \pm \dfrac{1}{\sqrt{|adj\ A|}} \cdot \text{adj } A$

✦ $A = \pm \dfrac{1}{\sqrt{|adj\ A|}} \cdot \text{adj } (\text{adj } A)$

orders@surabooks.com PH:9600175757 / 8124301000

This is Only for Sample for Full Book Order Online or Available at All Leading Bookstores

பயிற்சி 1.1

1. பின்வரும் அணிகளுக்குச் சேர்ப்பு அணி காண்க:

(i) $\begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}$ **(ii)** $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \\ 3 & 7 & 2 \end{bmatrix}$ **(iii)** $\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \end{bmatrix}$

தீர்வு :(i) $A = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$ என்க.

$$\text{adj } A = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -6 & -3 \end{pmatrix}$$

[முதன்மை மூலைவிட்ட உறுப்புகளை இடமாற்ற மற்றும் மூலைவிட்டமல்லாத உறுப்புகளின் குறியை மாற்றுக]

(ii) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \\ 3 & 7 & 2 \end{pmatrix}$ என்க.

$$\text{adj } A = \begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 7 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 7 & 2 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \end{pmatrix}^T$$

$$= \begin{bmatrix} +(8-7) & -(6-3) & +(21-12) \\ -(6-7) & +(4-3) & -(14-9) \\ +(3-4) & -(2-3) & +(8-9) \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 9 \\ 1 & 1 & -5 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}^T$$

$$\text{adj } A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & 1 & 1 \\ 9 & -5 & -1 \end{bmatrix}$$

(iii) $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \end{bmatrix}$ என்க. மற்றும் $\lambda = \frac{1}{3}$

$\text{adj } (\lambda A) = \lambda^{n-1}(\text{adj } A)$ ஆதலால்

$$\text{adj}\left(\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \end{bmatrix}\right) = \left(\frac{1}{3}\right)^2$$

$$\text{adj}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

∴ தேவையான அணியின் சேர்ப்பு

$$= \frac{1}{9}\begin{bmatrix} +\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} \end{bmatrix}^T$$

$$= \frac{1}{9}\begin{bmatrix} (2+4) & -(-4-2) & +(4-1) \\ -(4+2) & +(4-1) & -(-4-2) \\ +(4-1) & -(4+2) & +(2+4) \end{bmatrix}^T$$

$$= \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 6 & 6 & 3 \\ -6 & 3 & 6 \\ 3 & -6 & 6 \end{bmatrix}^T = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 6 & -6 & 3 \\ 6 & 3 & -6 \\ 3 & 6 & 6 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{3}{9}\begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

[ஒவ்வொரு வரிசையிலும் 3 ஐ பொதுவில் எடுக்க]

$$= \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

2. பின்வரும் அணிகளுக்கு நேர்மாறு (காண முடியுமெனில்) நேர்மாறு காண்க:

(i) $\begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$ **(ii)** $\begin{bmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \end{bmatrix}$ **(iii)** $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \\ 3 & 7 & 2 \end{bmatrix}$

தீர்வு : (i) $A = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$ என்க

$$|A| = \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = 6 - 4 = 2 \neq 0$$

A பூச்சியமற்றக் கோவை அணி ஆதலால் A^{-1} காணலாம்.

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\text{adj } A$$

இங்கு $\text{adj } A = \begin{bmatrix} -3 & -4 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$

[முதன்மை மூலைவிட்ட உறுப்புகளை இடமாற்றம் மற்றும் மூலைவிட்டத்தில் இல்லாத உறுப்புகளின் குறியை மாற்றுக]

$$\therefore A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -3 & -4 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$$

www.surabooks.com

orders@surabooks.com PH:9600175757 / 8124301000

This is Only for Sample for Full Book Order Online or Available at All Leading Bookstores

(ii) $A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \end{bmatrix}$ என்க.

R_1 மூலம் விரிவுபடுத்த,

$$|A| = 5\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$
$$= 5(25-1) - 1(5-1) + 1(1-5)$$
$$= 5(24) - 1(4) + 1(-4)$$
$$= 120 - 4 - 4 = 120 - 8 = 112 \neq 0$$

A ஒரு பூச்சியமற்றக் கோவை எனில் A^{-1} சாத்தியம்.

$$\text{adj } A = \begin{bmatrix} +\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} \end{bmatrix}^T$$

$$= \begin{bmatrix} +(25-1)-(5-1)+(1-5) \\ -(5-1)+(25-1)-(5-1) \\ +(1-5)-(5-1)+(25-1) \end{bmatrix}^T$$

$$= \begin{bmatrix} 24 & -4 & -4 \\ -4 & 24 & -4 \\ -4 & -4 & 24 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 24 & -4 & -4 \\ -4 & 24 & -4 \\ -4 & -4 & 24 \end{bmatrix}$$

ஒவ்வொரு உறுப்பிலிருந்தும் 4 ஐ பொதுவில் எடுக்க,

$$\text{adj } A = 4\begin{bmatrix} 6 & -1 & -1 \\ -1 & 6 & -1 \\ -1 & -1 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\therefore A^{-1} = \frac{1}{|A|}\text{adj } A = \frac{1}{112}\cdot 4\begin{bmatrix} 6 & -1 & -1 \\ -1 & 6 & -1 \\ -1 & -1 & 6 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{28}\begin{bmatrix} 6 & -1 & -1 \\ -1 & 6 & -1 \\ -1 & -1 & 6 \end{bmatrix}$$

(iii) $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \\ 3 & 7 & 2 \end{bmatrix}$ என்க.

R_1 மூலம் விரிவுபடுத்த கிடைப்பது,

$$|A| = 2\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 7 & 2 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 7 \end{vmatrix}$$
$$= 2(8-7) - 3(6-3) + 1(21-12)$$
$$= 2(1) - 3(3) + 1(9)$$
$$= 2 - \cancel{9} + \cancel{9} = 2 \neq 0$$

A ஒரு பூச்சியமற்றக் கோவை அணி ஆதலால் A^{-1} சாத்தியம்

$$\text{adj } A = \begin{bmatrix} +\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 7 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 7 & 2 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \end{bmatrix}^T$$

$$= \begin{bmatrix} +(8-7)-(6-3)+(21-12) \\ -(6-7)+(4-3)-(14-9) \\ +(3-4)-(2-3)+(8-9) \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 9 \\ 1 & 1 & -5 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}^T$$

$$\text{adj } A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & 1 & 1 \\ 9 & -5 & -1 \end{bmatrix}$$

இங்கு, $A^{-1} = \frac{1}{|A|}\text{adj } A$

$$\Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & 1 & 1 \\ 9 & -5 & -1 \end{bmatrix}$$

3. $F(\alpha) = \begin{bmatrix} \cos\alpha & 0 & \sin\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\alpha & 0 & \cos\alpha \end{bmatrix}$ **எனில்,**

$[F(\alpha)]^{-1} = F(-\alpha)$ எனக்காட்டுக. **[Hy - 2019]**

தீர்வு : $F(\alpha) = \begin{bmatrix} \cos\alpha & 0 & \sin\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\alpha & 0 & \cos\alpha \end{bmatrix}$ தரப்பட்டது.

R_1 மூலம் விரிவுபடுத்த கிடைப்பது,

$$|F(\alpha)| = \cos\alpha\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \cos\alpha \end{vmatrix} - 0 + \sin\alpha\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -\sin\alpha & 0 \end{vmatrix}$$
$$= \cos\alpha(\cos - 0) + \sin\alpha(0 + \sin\alpha)$$
$$= \cos^2 + \sin^2\alpha = 1 \neq 0$$

F (α) ஒரு பூச்சியமற்றக் கோவை அணி ஆதலால், $[F(\alpha)]^{-1}$ காணலாம்.

இங்கு, adj (F(α)) =

$$\begin{bmatrix} +\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \cos\alpha \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -\sin\alpha & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0 & \sin\alpha \\ 0 & \cos\alpha \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} \cos\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & 0 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 0 & \sin\alpha \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} \cos\alpha & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \end{bmatrix}^T$$

www.surabooks.com

This is Only for Sample for Full Book Order Online or Available at All Leading Bookstores

$$= \begin{bmatrix} +(\cos\alpha - 0) & -(0) & +(0+\sin\alpha) \\ -(0) & +(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) & -(0) \\ +(0-\sin\alpha) & -(0) & +(\cos - 0) \end{bmatrix}^T$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\alpha & 0 & +\sin\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\alpha & 0 & \cos\alpha \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \cos\alpha & 0 & -\sin\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ +\sin\alpha & 0 & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

$$\therefore F(\alpha)^{-1} = \frac{1}{|F(\alpha)|} \text{ adj } (F(\alpha))$$

$$[F(\alpha)]^{-1} = \frac{1}{1}\begin{bmatrix} \cos\alpha & 1 & -\sin\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ +\sin\alpha & 0 & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\alpha & 0 & -\sin\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\alpha & 0 & \cos\alpha \end{bmatrix} \quad ...(1)$$

இங்கு, $F(-\alpha) = \begin{bmatrix} \cos(-\alpha) & 0 & \sin(-\alpha) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(-\alpha) & 0 & \cos(-\alpha) \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} \cos\alpha & 0 & -\sin\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\alpha & 0 & \cos\alpha \end{bmatrix} \quad ...(2)$$

[∵ $\cos\alpha$ ஒரு இரட்டைச் சார்பு, $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$ மற்றும் $\sin\alpha$ ஒரு ஒற்றைச் சார்பு, $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$]

(1) மற்றும் (2)லிருந்து

$[F(\alpha)]^{-1} = F(-\alpha)$ எனவே நிரூபிக்கப்பட்டது.

4. $A = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$ **எனில், $A^2 - 3A - 7I_2 = O_2$ எனக்காட்டுக. இதன் மூலம் A^{-1} காண்க.**

தீர்வு : கொடுக்கப்பட்ட $A = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25-3 & 15-6 \\ -5+2 & -3+4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 22 & 9 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore A^2 - 3A - 7I_2$$

$$= \begin{bmatrix} 22 & 9 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} - 7\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 22-15-7 & 9-9+0 \\ -3+3+0 & 1+6-7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = O_2$$

எனவே நிரூபிக்கப்பட்டது.

$$\therefore A^2 - 3A - 7I_2 = 0$$

பின்புறமாக A^{-1} ஆல் பெருக்க கிடைப்பது,

$$A^2.A^{-1} - 3AA^{-1} - 7I_2 A^{-1} = 0.A^{-1}$$

$$\Rightarrow A(AA^{-1}) - 3(AA^{-1}) - 7(A^{-1}) = 0$$

[∵ $I_2 A^{-1} = A^{-1}$ மற்றும் $|(0)A^{-1} = 0$]

$$\Rightarrow AI - 3I - 7A^{-1} = 0 \qquad [\because AA^{-1} = I]$$

$$\Rightarrow AI - 3I = 7A^{-1} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{7}[A - 3I] \quad [\because AI = A]$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{7}\left[\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right]$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 5-3 & 3-0 \\ -1-0 & -2-3 \end{bmatrix} = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -5 \end{bmatrix}$$

$$\therefore A^{-1} = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -5 \end{bmatrix}$$

5. $A = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} -8 & 1 & 4 \\ 4 & 4 & 7 \\ 1 & -8 & 4 \end{bmatrix}$ **எனில், $A^{-1} = A^T$ நிறுவுக.**

தீர்வு : $A^{-1} = A^T$ என நிறுவ வேண்டும்.

$AA^{-1} = AA^T$

$AA^T = I$ என நிறுவினால் போதும்.

$$AA^T = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} -8 & 1 & 4 \\ 4 & 4 & 7 \\ 1 & -8 & 4 \end{bmatrix} \frac{1}{9}\begin{bmatrix} -8 & 1 & 4 \\ 1 & 4 & -8 \\ 4 & 7 & 4 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{81}\begin{bmatrix} 64+1+16 & -32+4+28 & -8-8+16 \\ -32+4+28 & 16+16+49 & 4-32-28 \\ -8-8+16 & 4-32+28 & 1+64+16 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{81}\begin{bmatrix} 81 & 0 & 0 \\ 0 & 81 & 0 \\ 0 & 0 & 81 \end{bmatrix} = \frac{81}{81}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

எனவே $A^{-1} = A^T$

6. $A = \begin{bmatrix} 8 & -4 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}$, **எனில் $A(\text{adj } A) = (\text{adj } A)A = |A|$ I_2 என்பதைச் சரிபார்க்க.** [செப். - 2020; ஆகஸ்ட் - 2021]

தீர்வு : கொடுக்கப்பட்ட $A = \begin{bmatrix} 8 & -4 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}$

$$\text{adj } A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}$$

[முதன்மை மூலைவிட்ட உறுப்புகளை இடமாற்ற மற்றும் மூலைவிட்டத்தில் இல்லாத உறுப்புகளின் குறியை மாற்ற]

$$|A| = 24 - 20 = 4$$

www.surabooks.com

orders@surabooks.com PH:9600175757 / 8124301000

This is Only for Sample for Full Book Order Online or Available at All Leading Bookstores

$$\therefore A\,(\text{adj } A) = \begin{bmatrix} 8 & -4 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 24-20 & 32-32 \\ -15+15 & -20+24 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \quad ...(1)$$

$$(\text{adj } A)\,(A) = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 8 & -4 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 24-20 & -12+12 \\ 40-40 & -20+24 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \quad ...(2)$$

$$|A|\, I_2 = 4\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \quad ...(3)$$

(1), (2) மற்றும் (3)லிருந்து,

$$A\,(\text{adj } A) = (\text{adj } A)\,A = |A|\, I_2$$

என நிரூபிக்கப்பட்டது.

7. $A=\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 5 \end{bmatrix}$ **மற்றும்** $B=\begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$ **எனில் $(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$ என்பதைச் சரிபார்க்க.**

தீர்வு : கொடுக்கப்பட்ட $A=\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 5 \end{bmatrix}$ மற்றும் $B=\begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$

$$AB = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3+10 & -9+4 \\ -7+25 & -21+10 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 7 & -5 \\ 18 & -11 \end{bmatrix}$$

$|AB| = -77 + 90 = 13 \neq 0 \Rightarrow (AB)^{-1}$ காணலாம்

$|A| = 15 - 14 = 1 \neq 0 \Rightarrow A^{-1}$ காணலாம்

$|B| = -2 + 15 = 13 \neq 0 \Rightarrow B^{-1}$ காணலாம்

$$(AB)^{-1} = \frac{1}{|AB|}\text{ adj }(AB) = \frac{1}{13}\begin{pmatrix} -11 & 5 \\ -18 & 7 \end{pmatrix} \quad ...(1)$$

$$B^{-1} = \frac{1}{|B|}(\text{adj } B) = \frac{1}{13}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -5 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}(\text{adj } A) = \frac{1}{1}\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -7 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -7 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\therefore B^{-1} A^{-1} = \frac{1}{13}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -5 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -7 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{13}\begin{pmatrix} 10-21 & -4+9 \\ -25+7 & 10-3 \end{pmatrix} = \frac{1}{13}\begin{pmatrix} -11 & 5 \\ -18 & 7 \end{pmatrix} \quad ...(2)$$

(1) மற்றும் (2) லிருந்து

$(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$. என நிரூபிக்கப்பட்டது.

8. $\text{adj}\,(A) = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 2 \\ -3 & 12 & -7 \\ -2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ **எனில் A - ஐ காண்க.**

[பிடிஏ - 6]

தீர்வு : கொடுக்கப்பட்ட $\text{adj } A = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 2 \\ -3 & 12 & -7 \\ -2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

$A = \pm\dfrac{1}{\sqrt{|\text{adj} A|}}.\text{adj } (\text{adj } A)$ என அறிவோம் ...(1)

$$|\text{adj } A| = 2\begin{vmatrix} 12 & -7 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} -3 & -7 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} -3 & 12 \\ -2 & 0 \end{vmatrix}$$

[R_1 மூலம் விரிவுபடுத்தப்பட்டது]

$$= 2\,(24-0) + 4\,(-6-14) + 2\,(0+24)$$
$$= 2\,(24) + 4\,(-20) + 2\,(24) = 48 - 80 + 48$$
$$= 96 - 80 = 16 \quad ...(2)$$

இங்கு, adj (adj A)

$$= \begin{bmatrix} +\begin{vmatrix} 12 & -7 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -3 & -7 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} -3 & 12 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} -4 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} -4 & 2 \\ 12 & -7 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -3 & -7 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ -3 & 12 \end{vmatrix} \end{bmatrix}^T$$

$$= \begin{bmatrix} +(24-0)-(-6-14)+(0+24) \\ -(-8-0)+(4+4)-(0-8) \\ +(28-24)-(-14+6)+(24-12) \end{bmatrix}^T$$

$$= \begin{bmatrix} 24 & 20 & 24 \\ 8 & 8 & 8 \\ 4 & 8 & 12 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 24 & 8 & 4 \\ 20 & 8 & 8 \\ 24 & 8 & 12 \end{bmatrix} = 4\begin{bmatrix} 6 & 2 & 1 \\ 5 & 2 & 2 \\ 6 & 2 & 3 \end{bmatrix} \quad ...(3)$$

(2) மற்றும் (3) ஐ (1) ல் பிரதியிட கிடைப்பது,

$$A = \pm\frac{1}{\sqrt{16}}.4\begin{bmatrix} 6 & 2 & 1 \\ 5 & 2 & 2 \\ 6 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A = \pm\frac{4}{4}\begin{bmatrix} 6 & 2 & 1 \\ 5 & 2 & 2 \\ 6 & 2 & 3 \end{bmatrix} = \pm\begin{bmatrix} 6 & 2 & 1 \\ 5 & 2 & 2 \\ 6 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

www.surabooks.com

orders@surabooks.com PH:9600175757 / 8124301000

This is Only for Sample for Full Book Order Online or Available at All Leading Bookstores

9. $\text{adj}(A) = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 6 & 2 & -6 \\ -3 & 0 & 6 \end{bmatrix}$ **எனில் A^{-1} -ஐ காண்க.**

தீர்வு : கொடுக்கப்பட்ட $\text{adj}(A) = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 6 & 2 & -6 \\ -3 & 0 & 6 \end{bmatrix}$

$A^{-1} = \pm \frac{1}{\sqrt{|\text{adj} A|}} (\text{adj } A)$ என அறிவோம். ...(1)

$|\text{adj } A| = 0 + 2 \begin{vmatrix} 6 & -6 \\ -3 & 6 \end{vmatrix} + 0$

[R_1 மூலம் விரிவுபடுத்தப்பட்டது]

$= 2(36 - 18) = 2(18) = 36$

$\therefore A^{-1} = \pm \frac{1}{\sqrt{36}} \begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 6 & 2 & -6 \\ -3 & 0 & 6 \end{bmatrix}$

$= \pm \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 6 & 2 & -6 \\ -3 & 0 & 6 \end{bmatrix}$

10. $\text{adj } A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ **எனில் adj (adj (A)) -ஐ காண்க .**

தீர்வு : கொடுக்கப்பட்ட $\text{adj } A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

இங்கு $\text{adj}(\text{adj } A) = \begin{bmatrix} +\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \end{bmatrix}^T$

$= \begin{bmatrix} +(2-0) & -(0) & +(0+2) \\ -(0) & +(1+1) & -(0) \\ +(0-2) & -(0) & +(2-0) \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{bmatrix}^T$

$\text{adj}(\text{adj } A) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

11. $A = \begin{bmatrix} 1 & \tan x \\ -\tan x & 1 \end{bmatrix}$ **எனில்** $A^T A^{-1} = \begin{bmatrix} \cos 2x & -\sin 2x \\ \sin 2x & \cos 2x \end{bmatrix}$ **எனக்காட்டுக.**

தீர்வு : $A = \begin{bmatrix} 1 & \tan x \\ -\tan x & 1 \end{bmatrix}$

$|A| = \begin{vmatrix} 1 & \tan x \\ -\tan x & 1 \end{vmatrix} = 1 + \tan^2 x = \sec^2 x$

$\text{adj } A = \begin{bmatrix} 1 & -\tan x \\ \tan x & 1 \end{bmatrix}$

நாம் அறிவது $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{Adj } A$

$= \frac{1}{\sec^2 x} \begin{bmatrix} 1 & -\tan x \\ \tan x & 1 \end{bmatrix} = \cos^2 x \begin{bmatrix} 1 & -\tan x \\ \tan x & 1 \end{bmatrix}$

$= \cos^2 x \begin{bmatrix} 1 & -\frac{\sin x}{\cos x} \\ \frac{\sin x}{\cos x} & 1 \end{bmatrix}$

$A^{-1} = \begin{bmatrix} \cos^2 x & -\cos x \sin x \\ \cos x \sin x & \cos^2 x \end{bmatrix}$

$A = \begin{bmatrix} 1 & \tan x \\ -\tan x & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{\sin x}{\cos x} \\ \frac{\sin x}{\cos x} & 1 \end{bmatrix}$

$A^T A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{\sin x}{\cos x} \\ \frac{\sin x}{\cos x} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos^2 x & -\cos x \sin x \\ \cos x \sin x & \cos^2 x \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} \cos^2 x - \sin^2 x & -2\sin x \cos x \\ 2\sin x \cos x & \cos^2 x - \sin^2 x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 2x & -\sin 2x \\ \sin 2x & \cos 2x \end{bmatrix}$

12. $A = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & 7 \\ 7 & 7 \end{bmatrix}$ **எனில் A -ஐ காண்க.**

தீர்வு : கொடுக்கப்பட்ட $A \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & 7 \\ 7 & 7 \end{bmatrix}$

$B = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$ மற்றும்

$C = \begin{bmatrix} 14 & 7 \\ 7 & 7 \end{bmatrix}$ என்க.

$\therefore AB = C$

B^{-1} ஆல் பின்புறம் பெருக்க கிடைப்பது

$A(BB^{-1}) = CB^{-1}$

www.surabooks.com

orders@surabooks.com PH:9600175757 / 8124301000

This is Only for Sample for Full Book Order Online or Available at All Leading Bookstores

அத்தியாயம்
7

வகை நுண்கணிதத்தின் பயன்பாடுகள்

முக்கிய வரையறைகள்

- ஒரு தளத்தில் உள்ள வளைவரைக்கு கொடுக்கப்பட்ட புள்ளியில் தொடுகோடு என்பது வளைவரையில் அப்புள்ளியை தொட்டுக் கொண்டு செல்லும் ஒரு நேர்க்கோடு ஆகும்.
- வளைவரை மீதுள்ள புள்ளியில் வளைவரைக்கு செங்கோடு என்பது அப்புள்ளியில் வரையப்பட்ட தொடுகோட்டிற்கு அப்புள்ளியில் செங்குத்தாக உள்ள நேர்க்கோடு ஆகும்.

இடைநிலை மதிப்புத் தேற்றம் :

- $f(x)$ என்ற சார்பு மூடிய இடைவெளி $[a, b]$ -ல் தொடர்ச்சியாக உள்ளது எனவும் $f(a)$ மற்றும் $f(b)$-க்கு இடையில் ($f(a)$ மற்றும் $f(b)$ உள்ளடங்கியது) c என்ற ஏதேனும் ஒரு எண் உள்ளது எனில், $[a, b]$ என்ற மூடிய இடைவெளியில் குறைந்தபட்சம் x என்ற ஒரு எண்ணையாவது $f(x) = c$ என்று காணலாம்.

ரோலின் தேற்றம் :

- $f(x)$ என்ற சார்பு மூடிய இடைவெளி $[a,b]$ -ல் தொடர்ச்சியானதாகவும், திறந்த இடைவெளி (a, b)-ல் வகையிடத்தக்கதாகவும் இருக்கிறது. மேலும் $f(a) = f(b)$ எனில், குறைந்தபட்சம் ஒரு புள்ளி $c \in (a, b)$ ஆனது $f'(c) = 0$ என்றவாறு இருக்கும்.

லெக்ராஞ்சியின் சராசரி மதிப்புத் தேற்றம் :

- $f(x)$ ஆனது மூடிய இடைவெளி $[a, b]$ தொடர்ச்சியானதாகவும், திறந்த இடைவெளி (a, b)-ல் வகையிடத்தக்கதாகவும் ($f(a)$, $f(b)$ ஆகியவை சமமாக இருக்க வேண்டிய அவசியம் இல்லை). உள்ளது என்க. அப்போது குறைந்தபட்சம் ஒரு புள்ளி $c \in (a, b)$ -யினை $f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ எனுமாறு காணலாம்.
- $f(x)$ என்ற சார்பானது மூடிய இடைவெளி $[a, b]$ -ல் தொடர்ச்சியானதாகவும், திறந்த இடைவெளி (a, b)-ல் வகையிடத்தக்கதாகவும் $f'(x) > 0\ \forall x \in (a, b)$ ஆகவும் இருந்தால், $x_1, x_2 \in [a, b]$ -க்கு $x_1 < x_2$ எனில் $f(x_1) < f(x_2)$ ஆகும்.
- $\lim\limits_{x\to\alpha} g(x)$ காணத்தக்கது மற்றும் இதன் மதிப்ப L என்க. மேலும் $f(x)$ ஆனது $x = \mathrm{L}$-ல் தொடர்ச்சியானது என்க. ஆகவே $\lim\limits_{x\to\alpha} f(g(x)) = f\left(\lim\limits_{x\to\alpha} g(x)\right)$
- $f(x)$ என்ற வகையிடத்தக்க சார்பிற்கு $(x_0, f(x_0))$ ஒரு தேக்கநிலைப்புள்ளி எனில் $f'(x_0) = 0$ ஆகும்.
- $f(x)$ என்ற வகையிடத்தக்க சார்பிற்கு $(x_0, f(x_0))$ ஒரு நிலைப்புள்ளி எனில் $f'(x_0) = 0$ அல்லது $f'(x_0)$ காணத்தக்கது அல்ல.
- $f(x)$ என்ற சார்பானது மூடிய இடைவெளி $[a, b]$-ல் தொடர்ச்சியாக இருந்தால், f ஆனது $[a, b]$-ல் ஒரு மீப்பெரு பெரும மதிப்பையும் மற்றும் ஒரு மீச்சிறு சிறும மதிப்பையும் பெறும்.

ஃபெர்மார்ட் :

- $f(x)$-க்கு $x = c$-ல் இடம் சார்ந்த அறுதி உள்ளது எனில் c ஒரு நிலை எண் ஆகும். இந்த நிலை எண்ணினை $f(x) = 0$ என்ற சமன்பாட்டை த் தீர்ப்பதன் மூலமாகவும், $f(x)$ காணத்தக்கதாக உள்ள x-ன் மதிப்புகளை காண்பதன் மூலமாகவும் பெறலாம்.

orders@surabooks.com PH:9600175757 / 8124301000
www.surabooks.com

This is Only for Sample for Full Book Order Online or Available at All Leading Bookstores

நினைவில் கொள்ள வேண்டிய சூத்திரங்கள்

- **ஒரு வளைவரையின் சாய்வு அல்லது சாய்வு விகிதம் :** $y = f(x)$ என்பது கொடுக்கப்பட்ட வளைவரை என்க. $(x, f(x))$ மற்றும் $(x + h, f(x + h))$ என்ற இரு வெவ்வேறு புள்ளிகளை இணைக்கும் ஒரு கோட்டின் சாய்வு

  $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ (நியூட்டனின் ஈவு) ... (1)

  $h \to 0$ எனும் போது எல்லையானது

  $$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'(x) \text{ [நியூட்டனின் ஈவின் எல்லை]} \quad ... (2)$$

  என்பது (x,y) அல்லது $(x, f(x))$ என்ற புள்ளியில் வளைவரையின் சாய்வாகும்.
- இரண்டு வளைவரைகளுக்கு இடைப்பட்ட கோணம் $\tan\theta = \left|\dfrac{m_1 - m_2}{1+m_1m_2}\right|$
- இரண்டு கோடுகள் இணை எனில் $m_1 = m_2$.
- இரண்டு கோடுகள் செங்குத்து எனில் $m_1\, m_2 = -1$
- **டெய்லரின் தொடர் :**

  $$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + ... \frac{f^n(a)(x-a)^n}{n!} + ...$$
- **மெக்லாரனின் தொடர் :**

  $a = 0$ எனில் மேற்கண்ட விரிவின் வடிவம்

  $$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^n(0)}{n!}x^n = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + ... + \frac{f^n(0)}{n!}x^n + ...$$
- **லோபிதாலின் விதி :**

  $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0 = \lim\limits_{x\to a} g(x)$, எனில் $\lim\limits_{x\to a} = \lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ ஆகும்.

  $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \pm\infty = \lim\limits_{x\to a} g(x)$, எனில் $\lim\limits_{x\to a} = \lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ ஆகும்.
- $f(x)$ என்ற சார்பு I என்ற இடைவெளியில் $a < b \Rightarrow f(a) \le f(b)\ \forall\ a, b \in$ I என இருந்தால் அச்சார்பு I என்ற இடைவெளியில் ஏறும்.
- $f(x)$ என்ற சார்பு I என்ற இடைவெளியில் $a < b \Rightarrow f(a) \ge f(b)\ \forall\ a, b \in$ I என இருந்தால் அச்சார்பு I என்ற இடைவெளியில் இறங்கும்.
- $\dfrac{d}{dx}(f(x)) \ge 0\ \forall\ x \in (a,b)$ எனில் (a,b) என்ற இடைவெளியில் $f(x)$ திட்டமாக ஏறும். ... (1)
- $\dfrac{d}{dx}(f(x)) > 0\ \forall\ x \in (a,b)$ எனில் (a,b) என்ற இடைவெளியில் $f(x)$ திட்டமாக ஏறும். ... (2)
- $\dfrac{d}{dx}(f(x)) \le 0\ \forall\ x \in (a,b)$ எனில், (a,b) என்ற இடைவெளியில் $f(x)$ இறங்கும். ... (3)

www.surabooks.com

orders@surabooks.com PH:9600175757 / 8124301000

This is Only for Sample for Full Book Order Online or Available at All Leading Bookstores

- $\frac{d}{dx}(f(x)) < 0 \;\forall\; x \in (a,b)$ எனில், (a,b) என்ற இடைவெளியில் $f(x)$ திட்டமாக இறங்கும். ... (4)
- **முதல் வகைக்கெழு சோதனை**
  - (i) $f'(x)$ ஆனது c–ல் குறையிலிருந்து மிகைக்கு மாறினால் , $f(x)$ –க்கு $f(c)$ என்பது இடம் சார்ந்த சிறுமம் ஆகும்.
  - (ii) $f'(x)$ ஆனது c–ல் மிகையிலிருந்து குறைக்கு மாறினால் , $f(x)$ –க்கு $f(c)$ என்பது இடம் சார்ந்த பெருமம் ஆகும்.
  - (iii) $f'(x)$ –ன் குறியானது c–ன் இருபுறமும் மிகையாகவோ அல்லது c–ன் இருபுறமும் குறையாகவோ இருந்தால் $f(c)$ என்பது இடம் சார்ந்த சிறுமமும் இல்லை இடம் சார்ந்த பெருமமும் இல்லை எனலாம்.
- **குழிவு தன்மை சோதனை :**
  - (i) திறந்த இடைவெளி I –ல் $f''(x) > 0$ எனில், I –ல் $f(x)$ மேல்நோக்கி குழிவு ஆகும்.
  - (ii) திறந்த இடைவெளி I –ல் $f''(x) > 0$ எனில், I –ல் $f(x)$ கீழ்நோக்கி குழிவு ஆகும்.
- **வளைவு மாற்றுப்புள்ளி சோதனை :**
  - (i) $f''(c)$ காணத்தக்கது மற்றும் $f''(c)$ –ன் குறி ஆனது $x = c$ –ஐ கடக்கும் போது மாறுகிறது, எனில் $(c, f(c))$ ஆனது f –ன் வளைவு மாற்றுப் புள்ளி ஆகும்.
  - (ii) வளைவு மாற்றுப்புள்ளி c–ல் $f''(c)$ காணத்தக்கது எனில், $f''(c) = 0$ ஆகும்.
- **இரண்டாம் வகைக்கெழு சோதனை :**

  c எனும் நிலைப்புள்ளியில் $f'(c) = 0$, எனவும் c–ன் அன்மையில் $f'(x)$ காணத்தக்கது எனவும் கொண்டால் $f''(c) < 0$ எனில் c–யில் f ஆனது இடஞ்சார்ந்த பெருமத்தை அடையும்.
- மேலும் $f'(c)$ எனில் இந்த சோதனையில் இடஞ்சார்ந்த அறுதி மதிப்புகளைப் பற்றிய தகவல் இல்லை என்கிறோம்.
- y - அச்சைப் பொருத்து சமச்சீர் $f(x, y) = f(-x, y) \;\forall\; x, y$
- x - அச்சைப் பொருத்து சமச்சீர் $f(x, y) = f(x, -y) \;\forall\; x, y$
- ஆதியைப் பொருத்து சமச்சீர் $f(x, y) = f(-x, -y) \;\forall\; x, y$
- **கிடைமட்டத் தொலைத் தொடுகோடு :**

  $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$ அல்லது $\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$ எனில் $y = L$ என்ற கோடு கிடைமட்டத் தொலைத் தொடுகோடு ஆகும்.
- **நிலைக்குத்து தொலைத் தொடுகோடு :**

  $\lim_{x\to a^-} f(x) = \pm\infty$ அல்லது $\lim_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty$ எனில் $x = a$ என்ற கோடு நிலைக்குத்து தொலைத் தொடுகோடு ஆகும்.
- **சாய்ந்த தொலைத் தொடுகோடு :**

  சாய்ந்த தொலைத் தொடுகோடு, ஒரு சாய்ந்த தொலைத் தொடுகோடு தொகுதியில் உள்ள பல்லுறுப்புக் கோவையின் வரிசைப் பகுதியில் உள்ள பல்லுறுப்புக் கோவையின் வரிசையை விட அதிகமாக இருந்தால் வரும்.

www.surabooks.com

orders@surabooks.com PH:9600175757 / 8124301000

This is Only for Sample for Full Book Order Online or Available at All Leading Bookstores

பயிற்சி 7.1

1. ஆதிப்புள்ளியிலிருந்து t வினாடிகளுக்குப் பிறகு ஒரு துகள் உள்ள தூரத்தின் அளவு $s = 2t^2 + 3t$ மீட்டர் எனும்படி நேர்க்கோட்டில் ஒரு துகள் நகர்கிறது.

(i) $t = 3$ மற்றும் $t = 6$ வினாடிகளுக்கிடையே உள்ள சராசரி திசைவேகம் என்ன?

(ii) $t = 3$ மற்றும் $t = 6$ வினாடிகளுக்கிடையே உள்ள கணப்பொழுது திசைவேகம் என்ன?

தீர்வு :

(i) கொடுக்கப்பட்ட $s = 2t^2 + 3t$

$s(3) = 2 \times 3^2 + 3(3) = 2 \times 9 + 9 = 27$ மீ ... (1)

$s(6) = 2 \times 6^2 + 3(6) = 72 + 18 = 90$ மீ ... (2)

சராசரி திசைவேகம் $= \dfrac{s(6) - s(3)}{6-3} = \dfrac{90-27}{3} = \dfrac{63}{3} = 21$ மீ/வினாடி

(ii) கணப்பொழுது திசைவேகம்

$V(t) = \dfrac{ds}{dt} = 4t + 3$

$t = 3$ இல் கணப்பொழுது திசைவேகம்

$\Rightarrow \quad 4t + 3 = 4(3) + 3 = 15$ மீ/வினாடி [(1) இலிருந்து]

$t = 6$ இல் கணப்பொழுது திசைவேகம்

$\Rightarrow \quad 4t + 3 = 4(6) + 3 = 24 + 3 = 27$ மீ/வினாடி [(2) இலிருந்து]

2. 400 அடி உயர மலை உச்சி முகட்டிலிருந்து தவறுதலாக ஒரு புகைப்படக் கருவி விழுகிறது. t வினாடிகளில் புகைப்படக் கருவி விழும் தூரம் $s = 16t^2$ ஆகும்.

(i) தரையைத் தொடும் முன்னர் புகைப்படக் கருவி விழ எடுத்துக்கொண்ட நேரம் என்ன?

(ii) கீழே விழுந்த இறுதி 2 வினாடிகளில் புகைப்படக் கருவியின் சராசரி திசைவேகம் என்ன ?

(iii) தரையைத் தொடும் போது புகைப்படக் கருவியின் கணப்பொழுது திசைவேகம் என்ன ?

தீர்வு : (i) கொடுக்கப்பட்ட $s(t) = 16t^2$,

உயரம் $= 400$ அடி

$16t^2 = 400$

$\Rightarrow \quad t^2 = \dfrac{400}{16} = \dfrac{100}{4}$

$t^2 = 25$

$t = 5$ வினாடி

(ii) சராசரி திசைவேகம் $= \dfrac{ds}{dt} = 32t$

இங்கு $t = 2$ வினாடி எனில்

இறுதி 2 வினாடிகளில் சராசரி

$= \dfrac{V \text{ at } t = 3 + V \text{ at } t = 5}{2}$

$= \dfrac{32(3) + 32(5)}{2}$

$= \dfrac{96 + 160}{2} = \dfrac{256}{2}$

$= 128$ அடி/வினாடி

(iii) கணப்பொழுது திசைவேகம் $= \dfrac{ds}{dt} = 32t$

இங்கு $t = 5$ வினாடி

திசைவேகம் $= \dfrac{ds}{dt} = 32(5)$

$= 160$ அடி/வினாடி

3. $s(t) = 2t^3 - 9t^2 + 12t - 4$, இங்கு $t \geq 0$ எனும் விதிப்படி ஒரு கோட்டில் ஒரு துகள் நகர்கிறது.

(i) எந்நேரங்களில் துகளின் திசை மாறுகின்றது?

(ii) முதல் 4 வினாடிகளில் துகள் பயணித்த தூரம் என்ன ?

(iii) திசைவேகம் பூச்சிய மதிப்பை அடையும் நேரங்களில் எல்லாம் துகளின் முடுக்கம் காண்க ?

தீர்வு : கொடுக்கப்பட்ட $s(t) = 2t^3 - 9t^2 + 12t - 4, t \geq 0.$

(i) வகைப்படுத்த கிடைப்பது,

$V(t) = 6t^2 - 18t + 12$ ... (1)

$= 6(t^2 - 3t + 2)$

$= 6(t-1)(t-2)$

இங்கு $V(t) = 0$

$\Rightarrow \quad 6(t-1)(t-2) = 0$

$\Rightarrow \quad t = 1, 2$

This is Only for Sample for Full Book Order Online or Available at All Leading Bookstores

$V(t)$ யின் குறி மாறும் பொழுது துகளின் திசை மாறுகின்றது.

$0 \le t < 1$ எனில், $(t-1)$ மற்றும் $(t-2)$ இரண்டும் < 0

$\Rightarrow \quad V(t) > 0$

$1 < t < 2$ எனில், $(t-1) > 0$ மற்றும் $(t-2) < 0$

$\Rightarrow \quad V(t) < 0$

$t > 2$ எனில், $(t-1)$ மற்றும் $(t-2)$ இரண்டும் > 0

$\Rightarrow \quad V(t) > 0$

$\therefore$ $t = 1$ மற்றும் $t = 2$ வினாடிகளில் துகளின் திசை மாறுகின்றது.

(ii) முதல் 4 வினாடிகளில் துகள் பயணித்த தூரம்

$|s(0) - s(1)| + |s(1) - s(2)| + |s(2) - s(4)|$

$$s(0) = -4$$
$$s(1) = 2(1)^3 - 9(1)^2 + 12(1) - 4 = 2 - 9 + 12 - 4 = 1$$
$$s(2) = 2 \times 2^3 - 9 \times 2^2 + 12 \times 2 - 4 = 16 - 36 + 24 - 4 = 0$$
$$s(4) = 2(4)^3 - 9(4)^2 + 12(4) - 4 = 128 - 144 + 48 - 4 = 28$$

$\therefore |s(0) - s(1)| + |s(1) - s(2)| + |s(2) - s(4)|$
$= |-4-1| + |1-0| + |0-28|$
$= |-5| + |1| + |-28|$
$= 5 + 1 + 28 = 34$ மீ

(iii) முடுக்கம் $A = 12t - 18$ $\left[\text{முடுக்கம்} = \frac{dv}{dt}\right]$

$t = 1$ எனில்,

முடுக்கம் $= 12(1) - 18 = -6$ மீ/வினாடி^{2}

$t = 2$ எனில்,

முடுக்கம் $= 12(2) - 18 = 6$ மீ/வினாடி^{2}

4. x பக்க அளவு கொண்ட ஒரு கன சதுரத்தின் கன அளவு $v = x^3$ எனில் $x = 5$ அலகுகள் எனும் போது x -ஐப் பொறுத்து கன அளவு மாறுவீதம் காண்க .

தீர்வு : கொடுக்கப்பட்ட $v = x^3$

x ஐ பொறுத்து வகைப்படுத்த கிடைப்பது,

$$\frac{dv}{dx} = 3x^2$$
$$x = 5 \text{ எனில் } \frac{dv}{dx} = 3(5^2) = 75$$
$$\therefore x = 5 \text{ ல் } \frac{dv}{dx} = 75 \text{ அலகுகள்.}$$

5. x நீளமுள்ள (மீட்டரில்) ஒரு மெல்லிய கோலின் நிறை $m(x)$ (கிலோகிராமில்), $m(x) = \sqrt{3x}$ எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது எனில், $x = 3$ மற்றும் $x = 27$ மீட்டர் எனும் போது நீளத்தைப் பொறுத்து நிறையின் மாறுபாட்டு வீதத்தை காண்க. [அ.மா.வி - 2019]

தீர்வு : கொடுக்கப்பட்ட $m(x) = \sqrt{3x} = \sqrt{3}.x^{\frac{1}{2}}$

x ஐ பொறுத்து வகைப்படுத்த கிடைப்பது,

$$\frac{dm}{dx} = \sqrt{3}.\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{\sqrt{3}}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{x}}$$
$$x = 3 \text{ இல் } \frac{dm}{dx} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{2} \text{ கிகி/மீ}$$
$$x = 27 \text{இல் } \frac{dm}{dx} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{27}} = \frac{\sqrt{3}}{2(3)\sqrt{3}} = \frac{1}{6} \text{ கிகி/மீ}$$

6. ஒரு குளத்தில் விழுந்த கல்லினால் பொது மைய வட்டங்களின் வடிவத்தில் சிற்றலைகள் ஏற்படுகின்றது. வெளிப்புற சிற்றலையின் ஆரம் r வினாடிக்கு 2 செ .மீ வீதம் அதிகரிக்கிறது. ஆரம் 5 செ.மீ. எனும் போது கலங்கும் நீரின் பரப்பளவு மாறுவீதம் என்ன ?

தீர்வு : சிற்றலையின் ஆரம் r மற்றும் பரப்பு A என்க.

கொடுக்கப்பட்ட $\frac{dr}{dt} = 2$ செ.மீ/ வினாடி மற்றும்

$r = 5$ செ.மீ ... (1)

$A = \pi r^2$ என்பது

't' ஐ பொறுத்து வகைப்படுத்த கிடைப்பது,

$$\frac{dA}{dt} = \pi(2r).\frac{dr}{dt}$$
$$= \pi(2)(5)(2)$$

[(1)-ஐ பயன்படுத்தி]

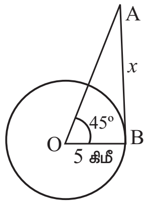
$$\frac{dA}{dt} = 20\,\pi \text{ சதுர செ.மீ / வினாடி}$$

7. கப்பலின் மீதுள்ள சுழலொளி விளக்கு ஒவ்வொரு 10 வினாடிகளுக்கு ஒரு முறை சுற்றுகிறது. கடற்கரையிலிருந்து 5 கி.மீ தூரத்தில் கப்பல் நங்கூரமிடப்பட்டுள்ளது. அவ்விளக்கின் ஒளிக்கற்றை கடற்கரையுடன் 45° கோணத்தை ஏற்படுத்தும் போது கடற்கரையில் ஒளிக்கற்றை எவ்வளவு வேகமாக நகரும்?

orders@surabooks.com PH:9600175757 / 8124301000

This is Only for Sample for Full Book Order Online or Available at All Leading Bookstores

தீர்வு : கலங்கரை விளக்கத்தின் ஒரு விளக்கு ஒவ்வொரு 10 வினாடிக்கு (360°) இல் சுற்றுவதால்



$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{2\pi}{10} = \frac{\pi}{5} \text{ ஆரம் / வினாடி}$$

AB = x என்க

$$\therefore \tan\theta = \frac{x}{5}$$

$$x = 5\tan\theta \qquad \ldots (1)$$

திசைவேகம் $= \frac{dx}{dt}$ என அறிவோம்.

't' யைப் பொறுத்து (1) ஐ வகையிட கிடைப்பது

$$\frac{dx}{dt} = 5 \text{ வினாடி}^2\,\theta . \frac{d\theta}{dt}$$

$$= 5\,(\text{வினாடி}^2)\,(45^\circ)\left(\frac{\pi}{5}\right)$$

$$= 5\left(\sqrt{2}\right)^2 \times \left(\frac{\pi}{5}\right) = 5\,(2) \times \left(\frac{\pi}{5}\right)$$

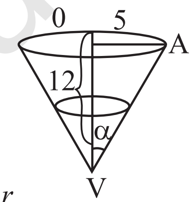
$$= 2\pi \text{ கிமீ/ வினாடி}$$

8. தலைகீழாக வைக்கப்பட்ட ஒரு நேர்வட்ட கூம்பின் வடிவில் உள்ள ஒரு நீர்நிலைத் தொட்டியின் ஆழம் 12 மீட்டர் மற்றும் மேலுள்ள வட்டத்தின் ஆரம் 5 மீட்டர் என்க . நிமிடத்திற்கு 10 கன மீட்டர் வேகத்தில் நீர் பாய்ச்சப்படுகிறது எனில், 8 மீட்டர் ஆழத்தில் நீர் இருக்கும் போது நீரின் ஆழம் அதிகரிக்கும் வேகம் என்ன ?

[Hy - 2019]

தீர்வு : கொடுக்கப்பட்ட h = 12 மீ

r = 5 மீ



V என்பது கூம்பின் கன அளவு

பாதி உச்சிக் கோணம் α

$$\therefore \tan\alpha = \frac{OA}{VO} = \frac{5}{12} = \frac{r}{h}$$

$$\Rightarrow \quad 12r = 5h$$

$$\Rightarrow \quad r = \frac{5h}{12} \qquad \ldots (1)$$

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h \text{ என அறிவோம்}$$

$$= \frac{1}{3}\pi\left(\frac{5h}{12}\right)^2 . h \qquad [(1) \text{ லிருந்து}]$$

$$V = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{25h^3}{144}\right) = \frac{25\pi h^3}{3\times 144}$$

't' யை பொறுத்து வகையிட கிடைப்பது

$$\frac{dv}{dt} = \frac{25\pi}{3\times 144}3h^2\frac{dh}{dt} = \frac{25\pi}{144}h^2\frac{dh}{dt}$$

$$\Rightarrow \quad 10 = \frac{25\pi}{144}(8)^2\frac{dh}{dt}$$

$$\left[\because \text{ கொடுக்கப்பட்ட } h = 8, \frac{dv}{dt} = 10\text{மீ}^3/\text{ வினாடி}\right]$$

$$\Rightarrow \quad \frac{10\times 144}{25\pi\times 64} = \frac{dh}{dt}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dh}{dt} = \frac{9}{10\pi} \text{ மீ / நிமிடம்}$$

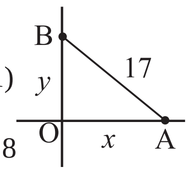
9. 17 மீட்டர் நீளமுள்ள ஒரு ஏணி செங்குத்தான சுவரில் சாய்த்து வைக்கப்பட்டுள்ளது. ஏணியின் அடிப்பக்கம் சுவற்றிலிருந்து விலகிச் செல்லும் வீதம் வினாடிக்கு 5 மீட்டர் எனில் ஏணியின் அடிப்பக்கம் சுவற்றிலிருந்து 8 மீட்டர் தொலைவில் இருக்கும் போது,

(i) அதன் உச்சி என்ன வீதத்தில் கீழ்நோக்கி இறங்கும் என்பதைக் காண்க .

(ii) எந்த வீதத்தில், ஏணி, சுவர் மற்றும் தரை ஆகியவற்றால் உருவாகும் முக்கோணத்தின் பரப்பளவு மாறுகிறது?

தீர்வு : **(i)** படத்தில் AB என்பது ஏணி. x + y என்பன முறையே கிடைமட்ட செங்குத்து நகர்வுகள் என்க.

பிதாகரஸ் தேற்றப்படி,



$$OA^2 + OB^2 = AB^2$$

$$\Rightarrow \quad x^2 + y^2 = 17^2 \qquad \ldots (1)$$

கொடுக்கப்பட்ட $\frac{dx}{dt} = 5$ மற்றும் $x = 8$

$x = 8$ எனில், $8^2 + y^2 = 17^2$

$$\Rightarrow \quad y^2 = 289 - 64 = 225$$

$$\Rightarrow \quad y = 15$$

't' யை பொறுத்து (1) யை வகைப்படுத்த கிடைப்பது,

$$2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt} = 0$$

$$\Rightarrow 8\,(5) + 15\frac{dy}{dt} = 0 \quad \left[\because x = 8, \frac{dx}{dt} = 15, y = 15\right]$$

$$\Rightarrow \quad 40 + 15\frac{dy}{dt} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dt} = \frac{-40}{15} = \frac{-8}{3} \text{ மீ/ வினாடி}$$

$\therefore$ ஏணியின் உச்சி கீழ் நோக்கி இறங்கும் விகிதம் $\frac{-8}{3}$ மீ/வினாடி.

www.surabooks.com

This is Only for Sample for Full Book Order Online or Available at All Leading Bookstores

(ii) ஏணி, சுவர் மற்றும் தரை ஆகியவற்றால் உருவாகும் செங்கோண முக்கோணம்

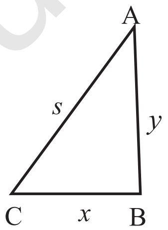
$\therefore$ பரப்பு $= \frac{1}{2}xy$

't' யை பொறுத்து வகையிட கிடைப்பது,

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}\left[x\frac{dy}{dt} + y\frac{dx}{dt}\right]$$
$$= \frac{1}{2}\left[8\left(-\frac{8}{3}\right) + 15(5)\right]$$
$$= \frac{1}{2}\left[\frac{-64}{3} + 75\right]$$
$$= \frac{1}{2}\left[\frac{-64+225}{3}\right] = \frac{1}{2}\left(\frac{161}{3}\right)$$
$$\frac{dA}{dt} = 26.83 \text{ சதுர மீ /வினாடி}$$

10. வடதிசையிலிருந்து ஒரு செங்கோண சந்திப்பை அணுகும் ஒரு காவல்துறை வாகனம் வேகமாகச் சென்று திரும்பி கிழக்கு நோக்கிச் செல்லும் ஒரு மகிழுந்தை துரத்துகிறது. சாலை சந்திப்பின் வடக்கே 0.6 கி.மீ தொலைவில் காவல்துறையின் வாகனமும் கிழக்கே 0.8 கி.மீ தொலைவில் மகிழுந்தும் உள்ள பொழுது, மின்காந்த அலைக் கருவியின் துணைகொண்டு காவல்துறை தங்களது வாகனத்திற்கும் மகிழுந்துக்கும் இடைப்பட்ட தூரம் மணிக்கு 20 கி.மீ வீதத்தில் அதிகரிக்கிறது எனத் தீர்மானிக்கின்றனர். காவல்துறை வாகனம் மணிக்கு 60 கி.மீ வேகத்தில் நகர்கிறது எனில் மகிழுந்தின் வேகம் என்ன? **[மார்ச் - 2020]**

தீர்வு : x குறிப்பது மகிழுந்து கடந்த தூரம், y குறிப்பது காவல்துறை கடந்த வாகனம் மற்றும் s குறிப்பது வாகனம் மற்றும் மகிழுந்து இடையேயான தூரம் ஆகும்.



$\therefore$ கொடுக்கப்பட்ட $= x = 0.8$ கி.மீ, $y = 0.6$ கி.மீ,

$$\frac{dy}{dt} = -60 \text{ கி.மீ / மணி,}$$
$$\frac{ds}{dt} = 20 \text{ கி.மீ / மணி,}$$

Δ ABC-ல் $s^2 = x^2 + y^2$ ... (1)

$\Rightarrow \quad s^2 = (0.8)^2 + (0.6)^2$
$= 0.64 + 0.36$
$s^2 = 1$

$\Rightarrow \quad s = 1$ ... (2)

't' யை பொறுத்து (1) யை வகையிட கிடைப்பது,

$$2s\frac{ds}{dt} = 2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt}$$

$$\Rightarrow \quad s\frac{ds}{dt} = x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt} \quad \text{[2 ஆல் வகுக்க]}$$
$$\Rightarrow \quad 1\left(\frac{ds}{dt}\right) = (0.8)\left(\frac{dx}{dt}\right) + (0.6)(-60)$$
$$\Rightarrow \quad 1(20) = (0.8)\left(\frac{dx}{dt}\right) + (0.6)(-60)$$
$$\Rightarrow \quad 20 = (0.8)\left(\frac{dx}{dt}\right) - 36$$
$$\Rightarrow \quad 20 + 36 = (0.8)\frac{dx}{dt}$$
$$\Rightarrow \quad \frac{dx}{dt} = \frac{56}{0.8} = 70 \text{ கி.மீ / மணி,}$$

$\therefore$ மகிழுந்தின் வேகம் 70 கி.மீ / மணி,

பயிற்சி 7.2

1. கொடுக்கப்பட்ட புள்ளிகளில் பின்வரும் வளைவரைகளுக்கும் தொடுகோட்டின் சாய்வினைக் காண்க .

(i) $y = x^4 + 2x^2 - x, x = 1$

(ii) $x = a\cos^3 t, y = b\sin^3 t, t = \frac{\pi}{2}$.

தீர்வு : (i) $y = x^4 + 2x^2 - x, x = 1$

கொடுக்கப்பட்ட $y = x^4 + 2x^2 - x$

$$\frac{dy}{dx} = 4x^3 + 4x - 1$$

$x = 1$ ல் தொடுகோட்டின் சாய்வு

$$m = \left(\frac{dy}{dx}\right)_{(x=1)}$$
$$= 4(1)^3 + 4(1) - 1$$
$$= 4 + 4 - 1 = 7$$
$$\therefore m = 7$$

(ii) $x = a\cos^3 t, y = b\sin^3 t$ **at** $t = \frac{\pi}{2}$.

கொடுக்கப்பட்ட $x = a\cos^3 t$; $y = b\sin^3 t$

$$\frac{dx}{dt} = -3a\cos^2 t\sin t;$$
$$\frac{dy}{dt} = 3b\sin^2 t\cot t$$
$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{3b\sin^2 t\cos t}{-3a\cos^2 t\sin t} = \frac{-b}{a}\tan t$$

$t = \frac{\pi}{2}$ என்பது தொடுகோட்டின் சாய்வு

This is Only for Sample for Full Book Order Online or Available at All Leading Bookstores

அத்தியாயம்
8

வகையீடுகள் மற்றும் பகுதி வகைக்கெழுக்கள்

முக்கிய வரையறைகள்

- **நேரியல் தோராய மதிப்பு :**
$f:(a, b) \to \mathbb{R}$ என்பதை வகையிடத்தக்கச் சார்பாகவும் $x_0 \in (a,b)$ எனவும் கொள்க. x_0 என்ற புள்ளியில் f -ன் தோராய மதிப்பு L-ன் வரையறை
$$L(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \ \forall \ x \in (a,b) \text{ ஆகும்.}$$
- $$\frac{df}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$$
- $df = f'(x)\,\Delta x$
- **தொடர்ச்சி தன்மை :** $A = \{(x, y) \,/\, a < x < b, c < y < d\} \subset \mathbb{R}^2$, $F: A \to \mathbb{R}$ என்ற சார்பு $F(u, v)$ இல் தொடர்ச்சியானது எனில் பின்வருவனவற்றை நிறைவு செய்ய வேண்டும்.
(1) (u, v) இல் F வரையறுக்கப்பட்டுள்ளது.
(2) $\lim_{(x,y)\to(u,v)} F(x,y) = L$ இருக்கிறது.
(3) $L = F(u, v)$
- **கிளெய்ராட்டின் தேற்றம் :** $A = \{(x, y) \,/\, a < x < b, c < y < d\} \subset R^2$, $F: A \to \mathbb{R}^2$ என்ற சார்பு A இல் f_{xy} மற்றும் f_{yx} காணப்பெற்று அவை தொடர்ச்சியானதாகவும் இருக்குமானால் A இல் $f_{xy} = f_{yx}$ என்பதாக இருக்கும்.
- **இலாபிலாஸின் சமன்பாடு :** $A = \{(x, y) \,/\, a < x < b, c < y < d\} \subset \mathbb{R}^2$ என்க. $u : A \to \mathbb{R}^2$ என்பது $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial y^2} = 0 \ \forall \ (x, y) \in A$ எனுமாறு இருக்குமானால் u ஆனது A-ல் சீரானது எனலாம். இது இலாபிலாஸின் சமன்பாடு எனப்படும்.
- பொருத்தமாக வரையறுக்கப்பட்ட λ, x, y- க்கு $(\lambda x, \lambda y) \in A$ எனில் $F(\lambda x, \lambda y) = \lambda^p F(x, y)$ $\lambda \in \mathbb{R}$ எனுமாறு p என்ற மாறிலி இருக்குமானால் சார்பு F என்பது A-ன் மீதான சமபடித்தான சார்பாக இருக்கும். இந்த மாறிலி p, சார்பு F -ன் படி எனப்படும்.

orders@surabooks.com PH:9600175757 / 8124301000

This is Only for Sample for Full Book Order Online or Available at All Leading Bookstores

நினைவில் கொள்ள வேண்டிய சூத்திரங்கள்

- தனி பிழை = மெய்மதிப்பு – தோராய மதிப்பு
- சார்பிழை = $\dfrac{\text{மெய் மதிப்பு – தோராய மதிப்பு}}{\text{மெய் மதிப்பு}}$
- சதவீதப்பிழை = சார்பிழை × 100
- $df = f'(x)\,\Delta x$
- $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{A}$ என்ற புள்ளியில் F-ன் நேரியல் தோராய மதிப்பு

  $$F(x, y, z) = F(x_0, y_0, z_0) + \left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0,z_0)}(x - x_0) + \left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0,z_0)}(y - y_0) + \left.\frac{\partial F}{\partial z}\right|_{(x_0,y_0,z_0)}(z - z_0)$$
- F -ன் வகையீடு

  $$dF = \frac{\partial F}{\partial x}(x, y, z)\,dx + \frac{\partial F}{\partial y}(x, y, z)\,dy + \frac{\partial F}{\partial z}(x, y, z)\,dz$$

  இங்கு $dx = \Delta x,\ dy = \Delta y$ மற்றும் $dz = \Delta z$.
- $w(x, y)$ என்பது x, y என்ற இரு மாறிகளில் அமைந்த சார்பு எனில் $\dfrac{\partial w}{dt} = \dfrac{\partial w}{\partial x}.\dfrac{dx}{dt} + \dfrac{\partial w}{\partial y}.\dfrac{dy}{dx}$
- $W(x, y)$ என்பது x, y என்ற இரு மாறிகளில் அமைந்த $\dfrac{\partial W}{\partial x}, \dfrac{\partial W}{\partial y}$ என்ற பகுதி வகைக்கெழுக்கள் கொண்ட சார்பு என்க. $x = x(s, t)$ மற்றும் $y = y(s, t),\ s, t \in \mathbb{R}$ என்ற இரு மாறிகளுக்கும் s மற்றும் t-ஐப் பொருத்த பகுதி வகைக்கெழுக்கள் உண்டு எனில், $\dfrac{\partial w}{\partial s} = \dfrac{\partial w}{\partial x}.\dfrac{\partial x}{\partial s} + \dfrac{\partial w}{\partial y}.\dfrac{\partial y}{\partial s}$, $\dfrac{\partial W}{\partial x} = \dfrac{\partial W}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial t} + \dfrac{\partial W}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial t}$
- **ஆய்லரின் தேற்றம் :** F என்ற சார்பு B-ன் மீது தொடர்ச்சியான பகுதி வகைக்கெழு உடையதாகவும் படி p உடைய சமபடித்தான சார்பாகவும் இருக்குமானால்

  $$x.\frac{\partial F}{\partial x}(x, y, z) + y\frac{\partial F}{\partial y}(x, y, z) + z\frac{\partial F}{\partial z}(x, y, z) = p\,F(x, y, z)\ \forall\ (x, y, z) \in A.$$

பயிற்சி 8.1

1. $f(x) = \sqrt[3]{x}$ என்க. $x = 27$ இல் நேரியல் தோராய மதிப்பைக் காண்க. நேரியல் தோராய மதிப்பை பயன்படுத்தி $\sqrt[3]{27.2}$ ன் மதிப்பைக் காண்க.

தீர்வு : கொடுக்கப்பட்ட $f(x) = \sqrt[3]{x}$ மற்றும்

$x_0 = 27$ என்க

$\Delta x = 0.2$ என அறிவோம்.

$L(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)\ \forall\ x \in (a,b)$

$\therefore \sqrt[3]{27.2} = f(27) + f'(27)(0.2)$ ...(1)

இங்கு $f(27) = \sqrt[3]{27} = 3$

$f'(x) = \dfrac{1}{3}x^{\frac{1}{3}-1} = \dfrac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} = \dfrac{1}{3x^{\frac{2}{3}}}$

$\therefore f'(27) = \dfrac{1}{3(27)^{\frac{2}{3}}} = \dfrac{1}{3(3^3)^{\frac{2}{3}}} = \dfrac{1}{3(3^2)} = \dfrac{1}{27}$

$\therefore$ (1) லிருந்து,

$\sqrt[3]{27.2} = 3 + \dfrac{1}{27}(0.2)$

$= 3 + .0074 = 3.0074$

$\therefore \sqrt[3]{27.2} = 3.0074$

2. நேரியல் தோராய மதிப்பீட்டு முறையில் பின்வருவனவற்றின் தோராய மதிப்புகளைக் காண்க .

(i) $(123)^{\frac{2}{3}}$ **(ii)** $\sqrt[4]{15}$ **(iii)** $\sqrt[3]{26}$

தீர்வு :(i) $(123)^{\frac{2}{3}}$

$f(x) = x^{\frac{2}{3}},\ x_0 = 125,\ \Delta x = -2$ என்க.

www.surabooks.com

This is Only for Sample for Full Book Order Online or Available at All Leading Bookstores

$\therefore (123)^{\frac{2}{3}} = f(125) + f'(125)(-2)$ ... (1)

$f(125) = (125)^{\frac{2}{3}} = (5^3)^{\frac{2}{3}} = 5^2 = 25$

$f'(x) = \frac{2}{3}x^{\frac{2}{3}-1} = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3x^{\frac{1}{3}}}$

$f'(125) = \frac{2}{3(125)^{\frac{1}{3}}} = \frac{2}{3(5^3)^{\frac{1}{3}}} = \frac{2}{3(5)} = \frac{2}{15}$

$\therefore$ (1) லிருந்து,

$(123)^{\frac{2}{3}} = 25 + \frac{2}{15}(-2)$

$= 25 - \frac{4}{15} = 25 - 0.27$

$(123)^{\frac{2}{3}} = 24.73$

(ii) $\sqrt[4]{15}$

$f(x) = x^{\frac{1}{4}}, x_0 = 16, \Delta x = -1$ என்க

$\therefore \sqrt[4]{15} = f(16) + f'(16)(-1)$ ... (1)

$f(16) = 16^{\frac{1}{4}} = (2^4)^{\frac{1}{4}} = 2^1 = 2$

$f'(x) = \frac{1}{4}x^{\frac{1}{4}-1} = \frac{1}{4}x^{-\frac{3}{4}} = \frac{1}{4x^{\frac{3}{4}}}$

$f'(16) = \frac{1}{4(16)^{\frac{3}{4}}} = \frac{1}{4(2^4)^{\frac{3}{4}}} = \frac{1}{4(2^3)} = \frac{1}{4(8)} = \frac{1}{32}$

$\therefore$ (1) லிருந்து,

$\sqrt[4]{15} = 2 + \frac{1}{32}(-1)$

$= 2 - \frac{1}{32} = 2 - 0.0312$

$\sqrt[4]{15} = 1.9688$

(iii) $\sqrt[3]{26}$

$f(x) = x^{\frac{1}{3}}, x_0 = 27, \Delta x = -1$

$\therefore \sqrt[3]{26} = f(27) + f'(27)(-1)$ ... (1)

$f(27) = (27)^{\frac{1}{3}} = (3^3)^{\frac{1}{3}} = 3^1 = 3$

$f'(x) = \frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}-1} = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3x^{\frac{2}{3}}}$

$\therefore f'(27) = \frac{1}{3(27)^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{3(3^3)^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{3(3^2)} = \frac{1}{27}$

$\therefore$ (1) லிருந்து,

$\sqrt[3]{26} = 3 + \frac{1}{27}(-1)$

$= 3 - \frac{1}{27} = 3 - 0.037$

$\sqrt[3]{26} = 2.963$

3. பின்வரும் சார்புகளுக்கு, கொடுக்கப்பட்ட புள்ளிகளில் நேரியல் தோராய மதிப்பைக் காண்க .

(i) $f(x) = x^3 - 5x + 12, x_0 = 2$ **[அ.மா.வி - 2019]**

(ii) $g(x) = \sqrt{x^2 + 9}, x_0 = -4$

(iii) $h(x) = \frac{x}{x+1}, x_0 = 1$

தீர்வு :(i) $f(x) = x^3 - 5x + 12, x_0 = 2$

$f(x) = x^3 - 5x + 12, x_0 = 2$

$f(x_0) = 2^3 - 5(2) + 12$

$= 8 - 10 + 12 = 10$

$f'(x) = 3x^2 - 5$

$\Rightarrow f'(x_0) = 3(2^2) - 5 = 7$

$\therefore L(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$

$= 10 + 7(x - 2)$

$= 10 + 7x - 14$

$L(x) = 7x - 4$

(ii) $g(x) = \sqrt{x^2 + 9}, x_0 = -4$

கொடுக்கப்பட்ட $g(x) = \sqrt{x^2 + 9}, x_0 = -4$

$g(x_0) = \sqrt{(-4)^2 + 9} = \sqrt{16 + 9} = 5$

$g'(x) = \frac{1}{2}(x^2 + 9)^{-\frac{1}{2}}(2x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 9}}$

$\therefore g'(x_0) = \frac{-4}{\sqrt{(-4)^2 + 9}} = \frac{-4}{5}$

$\therefore L(x) = g(x_0) + g'(x_0)(x - x_0)$

$= 5 - \frac{4}{5}(x + 4) = \frac{25 - 4x - 16}{5}$

$L(x) = \frac{9 - 4x}{5}$

www.surabooks.com

This is Only for Sample for Full Book Order Online or Available at All Leading Bookstores

(iii) $h(x) = \dfrac{x}{x+1}$, $x_0 = 1$

$$h(x_0) = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

$$h'(x) = \frac{(x+1)(1)-x(1)}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{x+1-x}{(x+1)^2} = \frac{1}{(x+1)^2}$$

$$h'(x_0) = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$$

$$\therefore L(x) = h(x_0) + h'(x_0)(x-x_0)$$

$$= \frac{1}{2}+\frac{1}{4}(x-1) = \frac{2+x-1}{4} = \frac{x+1}{4}$$

$$\therefore L(x) = \frac{x+1}{4}$$

4. ஒரு வட்ட வடிவ தகட்டின் ஆரம் 12.65 செ.மீ-க்குப் பதிலாக 12.5 செ.மீ என அளக்கப்படுகின்றது எனில் அதன் பரப்பு கணக்கிடுவதில் பின்வருவனவற்றை காண்க :

(i) தனிப்பிழை

(ii) சார் பிழை

(iii) சதவீதப் பிழை

தீர்வு : (i) தனிப்பிழை

ஆரம் r = 12.65

Δr = 12.5 – 12.65

$dr = \Delta r$ = – 0.15

வட்ட தகட்டின் பரப்பு $A = \pi r^2$

r ஐ பொறுத்து வகையிட

$$\frac{dA}{dr} = 2\pi r$$

$$dA = 2\pi r dr$$

$$dA = 2\pi \times 12.65 \times (-0.15)$$

$= -3.795\,\pi$ செ.மீ^{2}

தோராயப்பிழை $= -3.795\,\pi$ செ.மீ^{2}

மெய்பிழை $= A(12.5) - A(12.65)$

$= \pi(12.5)^2 - \pi(12.65)$

$= \pi(156.25 - 160.0225)$

$= -3.7725\,\pi$ செ.மீ^{2}

தனிப்பிழை = மெய்பிழை = தோராயப்பிழை

$= -3.7725\,\pi + 3.795\,\pi$

$= 0.0225\,\pi$ செ.மீ^{2}

(ii) சார் பிழை $= \dfrac{\text{தனிப்பிழை}}{\text{மெய்ப்பிழை}}$

$$= \frac{0.0225\,\not\pi}{-3.7725\,\not\pi} = -0.00596$$

$\simeq -0.006$

(iii) சதவீதப் பிழை = சார்பிழை $\times 100$

$= -0.006 \times 100 = -0.6\%$

5. பனிக்கட்டியிலான ஒரு கோளத்தின் ஆரம் 10 செ.மீ. அதன் ஆரம் 10 செ.மீலிருந்து 9.8 செ.மீ -ஆக குறைகின்றது. பின்வருவனவற்றின் தோராய மதிப்பினைக் காண்க :

(i) கன அளவில் ஏற்படும் மாற்றம்

(ii) வளைபரப்பில் ஏற்படும் மாற்றம்

தீர்வு : கன அளவில் ஏற்படும் மாற்றம் $= \dfrac{4}{3}\pi r^3$

கொடுக்கப்பட்ட r = 10 செ.மீ

$\dfrac{dr}{dt}$ = –0.2 செ.மீ

(i) கன அளவு

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

கன அளவில் ஏற்படும் மாற்றம்

$$= \frac{4}{\not 3}\pi .\not 3 r^2 \frac{dr}{dt}$$

$= 4\pi(10)^2(-0.2)$

$= 400\,\pi(-0.2) = -80\,\pi$ செ.மீ^{3}

$\therefore$ கன அளவு $80\,\pi$ செ.மீ^{3} குறைகிறது.

(ii) வளைபரப்பில் ஏற்படும் மாற்றம்

கோளத்தின் வளைபரப்பு $= 4\pi r^2$

வளைபரப்பில் ஏற்படும் மாற்றம் $= 4\pi .2r.\dfrac{dr}{dt}$

$= 8\pi(10)(-0.2)$

$= -\dfrac{80\pi \times 2}{10} = -16\,\pi$ செ.மீ^{2}

$\therefore$ வளைப்பரப்பு $16\,\pi$ செ.மீ^{2} குறைகிறது.

6. l நீளம் உள்ள ஒரு தனி ஊசலின் முழு அலைவு நேரம் T என்பது $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$ என கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. இங்கு g ஒரு மாறிலி l-ல் ஏற்படும் 2 சதவீதப் பிழைக்கு ஏற்ப T-ன் கணக்கீட்டில் ஏற்படும் தோராய சதவீதப் பிழையைக் காண்க.

This is Only for Sample for Full Book Order Online or Available at All Leading Bookstores

தீர்வு : கொடுக்கப்பட்ட தனி பிழை = 2%

$$\Rightarrow \quad \frac{dl}{l} = 2\% = \frac{2}{100} = 0.02$$

கொடுக்கப்பட்ட $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$

இருபுறமும் மடக்கை எடுக்க கிடைப்பது,

$$\log T = \log 2\pi + \frac{1}{2}\log l - \frac{1}{2}\log g$$

இருபுறமும் வகையீடு எடுக்க கிடைப்பது,

$$\frac{1}{T}dT = 0 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{l}\cdot dl$$

$$\frac{\Delta T}{T} = \frac{1}{2}(.02)$$

$$\frac{\Delta T}{T} = 0.01$$

தோராய சதவீத பிழை $= \frac{\Delta T}{T}\times 100 = 0.01\times 100 = 1\%$

7. ஓர் எண்ணின் n -ஆம் படி மூலம் கணக்கிடப்படும் போது ஏற்படும் சதவீதப் பிழை தோராயமாக, அந்த எண்ணின் சதவீதப் பிழையின் $\frac{1}{n}$ மடங்கு ஆகும் எனக்காட்டுக.

தீர்வு : அந்த எண் x என்க.

$$y = f(x) = x^{\frac{1}{n}}$$

பிறகு $\log y = \frac{1}{n}\log x$

இருபுறமும் வகையீடு எடுக்க கிடைப்பது

$$\frac{1}{y}dy = \frac{1}{n}\times\frac{1}{x}dx$$

அதாவது $\frac{\Delta y}{y} \simeq \frac{dy}{y} = \frac{1}{n}\cdot\frac{dx}{x}$

சதவீத பிழை $= \frac{\Delta y}{y}\times 100 \simeq \frac{1}{n}\left(\frac{dx}{x}\times 100\right)$

அந்த எண்ணின் சதவீதப் பிழையின் $\simeq \frac{1}{n}$ மடங்கு

எனவே ஒரு எண்ணின் nஆம் படி மூலம் கணக்கிடப்படும் போது ஏற்படும் சதவீதப் பிழை தோராயமாக, அந்த எண்ணின் சதவீதப் பிழையின் $\frac{1}{n}$ மடங்கு ஆகும்.

பயிற்சி 8.2

1. பின்வரும் சார்புகளுக்கு வகையீடு dy காண்க :

(i) $y = \frac{(1-2x)^3}{3-4x}$ **[Hy - 2019]**

(ii) $y = (3 + \sin(2x))^{2/3}$

(iii) $y = e^{x^2-5x+7}\cos(x^2-1)$

தீர்வு : (i) $y = \frac{(1-2x)^3}{3-4x}$

கொடுக்கப்பட்ட $y = \frac{(1-2x)^3}{3-4x}$

வகையீடு எடுக்க

$$dy = \frac{(3-4x)\left[3(1-2x)^2(-2)\right]-(1-2x)^3(-4)}{(3-4x)^2}dx$$

$$= \frac{2(1-2x)^2\left[-3(3-4x)+2(1-2x)\right]}{(3-4x)^2}dx$$

$$= \frac{2(1-2x)^2[-9+12x+2-4x]}{(3-4x)^2}dx$$

$$dy = \frac{2(1-2x)^2[8x-7]}{(3-4x)^2}dx$$

(ii) $y = (3+\sin(2x))^{\frac{2}{3}}$

கொடுக்கப்பட்ட $y = (3+\sin(2x))^{\frac{2}{3}}$

வகையீடு எடுக்க

$$dy = \frac{2}{3}(3+\sin 2x)^{\frac{2}{3}-1}(\cos 2x)(2)dx$$

$$dy = \frac{4}{3}\cdot\frac{\cos 2x}{(3+\sin 2x)^{\frac{1}{3}}}dx$$

(iii) $y = e^{x^2-5x+7}\cos(x^2-1)$

கொடுக்கப்பட்ட $y = e^{x^2-5x+7}\cos(x^2-1)$

வகையீடு எடுக்க

$$dy = (e^{x^2-5x+7}(-\sin(x^2-1)(2x)) + \cos(x^2-1)\,e^{x^2-5x+7}(2x-5))dx$$

$$= e^{x^2-5x+7}[(2x-5)\cos(x^2-1) - 2x\sin(x^2-1)]dx$$

2. $f(x) = x^2 + 3x$ என்ற சார்பிற்கு df காண்க மற்றும்

(i) $x = 2, dx = 0.1$ **[மார்ச் - 2020]**

(ii) $x = 3$ **மற்றும்** $dx = 0.02$ **எனும் போது** df **-ஐ மதிப்பிடுக.**

www.surabooks.com

This is Only for Sample for Full Book Order Online or Available at All Leading Bookstores

அத்தியாயம்
9

தொகை நுண்கணிதத்தின் பயன்பாடுகள்

முக்கிய வரையறைகள்

- முதல் தொகை நுண்கணித அடிப்படைத் தேற்றம் $F(x) = \int_a^x f(u)du$, $a < x < b$ எனில் $\frac{d}{dx}(F(x)) = f(x)$
- இரண்டாம் தொகை நுண்கணித அடிப்படைத் தேற்றம் $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$
- $\int_0^\infty e^{-x}x^{n-1}dx$ என்பது காமா தொகையிடல் $\Gamma(n)$

நினைவில் கொள்ள வேண்டிய சூத்திரங்கள்

- **ரீமன் தொகையீட்டினை மதிப்பிடுவதற்கான வலது - முனை விதி :**

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty \text{ மற்றும் } \max(x_i - x_{i-1})\to 0} \sum_{i=1}^n f(x_i)(x_i - x_{i-1})$$

- **ரீமன் தொகையீட்டினை மதிப்பிடுவதற்கான இடது - முனை விதி :**

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty \text{ மற்றும் } \max(x_i - x_{i-1})\to 0} \sum_{i=1}^n f(x_{i-1})(x_i - x_{i-1})$$

- **ரீமன் தொகையீட்டினை மதிப்பிடுவதற்கான நடு - முனை விதி :**

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty \text{ மற்றும் } \max(x_i - x_{i-1})\to 0} \sum_{i=1}^n f\left(\frac{x_{i-1}+x_i}{2}\right)(x_i - x_{i-1})$$

orders@surabooks.com PH:9600175757 / 8124301000
www.surabooks.com

This is Only for Sample for Full Book Order Online or Available at All Leading Bookstores

✦ $\int_a^b f(x)dx$ ஐ மதிப்பிட எல்லை சூத்திரம்

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n}\sum_{r=1}^{n} f\left(a+(b-a)\frac{r}{n}\right)$$

✦ **வரையறுத்தத் தொகையிடலின் பண்புகள் :**

1. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(u)du$, $a < b$
2. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$
3. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$, $a < c < b$
4. $\int_a^b [\alpha f(x) + \beta g(x)]dx$
   $= \alpha\int_a^b f(x)dx + \beta\int_a^b g(x)dx$
   இங்கு α மற்றும் β மாறிலிகள்
5. $f(2a-x) = -f(x)$ எனில் $\int_0^{2a} f(x)dx = 0$
6. $f(a-x)=f(x)$ எனில் $\int_0^a xf(x)dx = \frac{a}{2}\int_0^a f(x)dx$
7. $f(x)$ ஒரு ஒற்றை சார்பு எனில்
   $\int_{-a}^a f(x)dx = 0$
8. $f(x)$ ஒரு இரட்டை சார்பு எனில்
   $\int_{-a}^a f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$
9. $\int_0^\infty \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{\pi}{2a}$
10. $\int_a^\infty \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{\pi}{4a}$
11. $\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{\pi}{a}$
12. $\int_0^\infty e^{-ax}x^n dx = \frac{n!}{a^{n+1}}$

✦ **பெர்னோலி சூத்திரம் :**

$\int uv\,dx = uv_{(1)} - u^{(1)}v_{(2)} + u^{(2)}v_{(3)} - u^{(3)}v_{(4)} + \ldots..$

✦ **குறைப்புச் சூத்திரங்கள் :**

1. $I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x\,dx = \frac{n-1}{n} I_{n-2}, n \geq 2$
2. $I_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n x\,dx = \frac{n-1}{n} I_{n-2}, n \geq 2$
3. $I_{m,n} = \int_0^{\pi/2} \sin^m x \cos^n x\,dx$
   $= \frac{(n-1)}{m+n} I_{m,n-2}, n \geq 2$
4. $I_{m,n} = \int_0^1 x^m(1-x)^n\,dx$
   $= \frac{n}{m+n+1} I_{m,n-1}, n \geq 1$

✦ **பரப்பு :**

பரப்பு $= \int_a^b y\,dx$ அல்லது பரப்பு $= \int_c^d x\,dy$

✦ **இரண்டு வளைவரைகளுக்கு இடையேயான பரப்பு :**

$A = \int_a^b (f(x)-g(x))\,dx$ அல்லது $A = \int_c^d f(y)-g(y)\,dy$

✦ **கன அளவு :**

$V = \pi\int_a^b y^2dx$ அல்லது $\pi\int_c^d x^2dy$

www.surabooks.com

orders@surabooks.com PH:9600175757 / 8124301000

This is Only for Sample for Full Book Order Online or Available at All Leading Bookstores

பயிற்சி 9.1

1. {1.1, 1.2, 1.3, 1.4, 1.5} எனும் பிரிவினையுடன் இடது-முனை விதியைப் பயன்படுத்தி $\int_1^{1.5} x\,dx$ -க்கு தோராய மதிப்பு காண்க.

தீர்வு : இங்கு $a = 1,$

$b = 1.5, n = 5, f(x) = x$

$\therefore h = \Delta x = \dfrac{b-a}{n} = \dfrac{1.5-1}{5} = \dfrac{0.5}{5} = 0.1$

சம அளவு Δx கொண்ட ரீமன் கூட்டலுக்கான இடது விதியானது

$$\int_a^b x\,dx = [f(x_0)+f(x_1)+.....+f(x_{(n-1)})]\Delta x$$

$$= [f(1)+f(1.1)+f(1.2)+f(1.3)+f(1.4)](0.1)$$

$$= (1+1.1+1.2+1.3+1.4)(0.1)$$

$$= 6(0.1)$$

$$\therefore \int_1^{1.5} x\,dx = 0.6$$

2. {1.1, 1.2, 1.3, 1.4, 1.5} எனும் பிரிவினையுடன் வலது-முனை விதியைப் பயன்படுத்தி $\int_1^{1.5} x^2 dx$ -க்கு தோராய மதிப்பு காண்க.

தீர்வு : இங்கு $a = 1, b = 1.5,$

$h = \Delta x = \dfrac{b-a}{n} = \dfrac{1.5-1}{5} = \dfrac{0.5}{5} = 0.1$

சம அளவு Δx கொண்ட ரீமன் கூட்டலுக்கான வலது முனை விதியானது

$$S = [f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)+f(x_4)+f(x_5)]\Delta x$$

$$= [f(1.1)+f(1.2)+f(1.3)+f(1.4)+f(1.5)](0.1)$$

$$= [(1.1)^2+(1.2)^2+(1.3)^2+(1.4)^2+(1.5)^2](0.1)$$

$$= (1.21+1.44+1.69+1.96+2.25)(0.1)$$

$$= (8.55)(0.1)$$

$$\therefore \int_1^{1.5} x^2\,dx = 0.855$$

3. {1.1, 1.2, 1.3, 1.4, 1.5}எனும் பிரிவினையுடன் நடு-முனை விதியைப் பயன்படுத்தி $\int_1^{1.5} (2-x)dx$-க்கு தோராய மதிப்பு காண்க.

தீர்வு : இங்கு $a = 1, b = 1.5, n = 5$ மற்றும் $f(x) = 2 - x$

$h = \Delta x = \dfrac{b-a}{n} = \dfrac{1.5-1}{5} = \dfrac{0.5}{5} = 0.1$

சம அளவு Δx கொண்ட ரீமன் கூட்டலுக்கான நடுமுனை விதியானது

$$S = \left[f\left(\frac{x_0+x_1}{2}\right)+f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)+f\left(\frac{x_2+x_3}{2}\right)+f\left(\frac{x_3+x_4}{2}\right)+f\left(\frac{x_4+x_5}{2}\right)\right]\Delta x$$

$$= \left[f\left(\frac{1+1.1}{2}\right)+f\left(\frac{1.1+1.2}{2}\right)+f\left(\frac{1.2+1.3}{2}\right)+f\left(\frac{1.3+1.4}{2}\right)+f\left(\frac{1.4+1.5}{2}\right)\right]0.1$$

$$= [f(1.05)+f(1.15)+f(1.25)+f(1.35)+f(1.45)](0.1)$$

$$= [0.95+0.85+0.75+0.65+0.55)](0.1)$$

$$= [(2-1.05)+(2-1.15)+(2-1.25)+(2-1.35)+(2-1.45)](0.1)$$

$$= (3.75)(0.1) = 0.375 \quad \therefore \int_1^{1.5} (2-x)dx = 0.375$$

பயிற்சி 9.2

1. கீழ்க்காணும் தொகையீடுகளை கூட்டலின் எல்லைகளாக கணக்கிடுக:

(i) $\int_0^1 (5x+4)dx$ **(ii)** $\int_1^2 (4x^2-1)dx$

தீர்வு : (i) $\int_0^1 (5x+4)dx$

இங்கு $a = 0, b = 1, f(x) = 5x + 4$

$$\therefore f\left(a+(b-a)\frac{r}{n}\right) = f\left(0+1\left(\frac{r}{n}\right)\right) = f\left(\frac{r}{n}\right) = 5\left(\frac{r}{n}\right)+4$$

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n}\sum_{r=1}^{n} f\left(a+(b-a)\frac{r}{n}\right)$$

$$\therefore \int_0^1 (5x+4)dx = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{r=1}^{n}\left(\frac{5r}{n}+4\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n}\sum_{r=1}^{n}\frac{5r}{n}+\frac{1}{n}\sum_{r=1}^{n}4\right]$$

www.surabooks.com

This is Only for Sample for Full Book Order Online or Available at All Leading Bookstores

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n}\cdot\frac{5}{n}\cdot(1+2+3+...+n)+\frac{1}{n}\cdot 4n\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\frac{5}{n^2}\frac{n(n+1)}{2}+4\right]$$

$$[\because \Sigma r = \frac{n(n+1)}{2};\ \Sigma r^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}]$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{5}{n^2}n^2\frac{(1+\frac{1}{n})}{2}+4$$

$$= \frac{5}{2}(1+0)+4 = \frac{5}{2}+4$$

[$\because n\to\infty$ எனில் $1/n \to 0$]

$$= \frac{5+8}{2} = \frac{13}{2}$$

$$\therefore \int_0^1 (5x+4)dx = \frac{13}{2}$$

(ii) $\int_1^2 (4x^2-1)dx$

இங்கு $a = 1, b = 2, f(x) = 4x^2 - 1$

$$\therefore f(a+(b-a)\tfrac{r}{n}) = f(1+1(\tfrac{r}{n}))$$

$$= f(1+\tfrac{r}{n})$$

$$= 4(1+\tfrac{r}{n})^2 - 1 = 4(1+\tfrac{r^2}{n^2}+\tfrac{2r}{n})-1$$

$$= 4+\frac{4r^2}{n^2}+\frac{8r}{n}-1 = 3+\frac{4r^2}{n^2}+\frac{8r}{n}$$

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\frac{b-a}{n}\sum_{r=1}^{n} f\left(a+(b-a)\frac{r}{n}\right)$$

$$\therefore \int_1^2 (4x^2-1)\,dx = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{r=1}^{n}\left(3+\frac{4r^2}{n^2}+\frac{8r}{n}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n}\sum_{r=1}^{n}3+\frac{1}{n}\sum_{r=1}^{n}\frac{4r^2}{n^2}+\frac{1}{n}\sum_{r=1}^{n}\frac{8r}{n}\right]$$

$$= \left[\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}.3n+\frac{1}{n}\frac{4}{n^2}(1^2+2^2+...+n^2)+\frac{1}{n}\cdot\frac{8}{n}(1+2+3....+n)\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[3+\frac{4}{n^3}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{8}{n^2}\frac{n(n+1)}{2}\right]$$

$$[\because \Sigma r = \frac{n(n+1)}{2} \quad \Sigma r^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}]$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[3+\frac{4}{n^3}\frac{n^3(1+\frac{1}{n})(2+\frac{1}{n})}{6}+\frac{8}{n^2}\frac{n^2(1+\frac{1}{n})}{2}\right]$$

$$= 3+\tfrac{2}{3}(1+0)(2+0)+4(1+0)$$

[$\because n\to\infty$ எனில் $1/n \to 0$]

$$= 3+\frac{4}{3}+4 = \frac{9+4+12}{3} = \frac{25}{3}$$

$$\therefore \int_1^2 (4x^2-1)\,dx = \frac{25}{3}$$

பயிற்சி 9.3

1. பின்வரும் வரையறுத்த தொகையிடலின் மதிப்பு காண்க :

(i) $\int_3^4 \frac{dx}{x^2-4}$ [செப். - 2020]

(ii) $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2+2x+5}$

(iii) $\int_0^1 \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,dx$ [ஆகஸ்ட் - 2021]

(iv) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x\left(\frac{1+\sin x}{1+\cos x}\right)dx$

(v) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos\theta}\sin^3\theta\, d\theta$

(vi) $\int_0^1 \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}dx$

தீர்வு : (i) $\int_3^4 \frac{dx}{x^2-4}$

$$\int_3^4 \frac{dx}{x^2-4} = \int_3^4 \frac{dx}{x^2-2^2}$$

$$\left[\because \int\frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\log\left|\frac{x-a}{x+a}\right|\right]$$

orders@surabooks.com PH:9600175757 / 8124301000

This is Only for Sample for Full Book Order Online or Available at All Leading Bookstores

$$= \left[\frac{1}{2(2)}\log\left|\frac{x-2}{x+2}\right|\right]_3^4$$

$$= \frac{1}{4}\left[\log\left(\frac{2}{6}\right) - \log\left(\frac{1}{5}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{4}\log\left[\left(\frac{2}{6} \div \frac{1}{5}\right)\right] = \frac{1}{4}\log\left(\frac{2}{6} \times \frac{5}{1}\right)$$

$$= \frac{1}{4}\log\left(\frac{5}{3}\right)$$

$$\therefore \int_3^4 \frac{dx}{x^2-4} = \frac{1}{4}\log\left(\frac{5}{3}\right)$$

(ii) $$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2+2x+5}$$

$$= \int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2+2x+1+4} = \int_{-1}^{1} \frac{dx}{(x+1)^2+2^2}$$

$$\left[\because \int \frac{dx}{x^2+a^2}dx = \frac{1}{a}\tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)+c\right]$$

$$= \left[\frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{x+1}{2}\right)\right]_{-1}^{1}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\tan^{-1}(1) - \tan^{-1}(0)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\pi}{4}\right] = \frac{\pi}{8}$$

(iii) $$\int_0^1 \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,dx = \int_0^1 \sqrt{\frac{(1-x)(1-x)}{(1+x)(1-x)}}\,dx$$

[தொகுதி மற்றும் பகுதியை $1-x$ ஆல் பெருக்க]

$$= \int_0^1 \frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx - \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

$$= \left[\sin^{-1}(x)\right]_0^1 + \left[\sqrt{1-x^2}\right]_0^1$$

$$= \sin^{-1}(1) - \sin^{-1}(0) + 0 - 1$$

$$= \frac{\pi}{2} - 0 - 1 = \frac{\pi}{2} - 1$$

$(1-x^2) = t \Rightarrow -2x\,dx = dt$

$$\Rightarrow -x\,dx = \frac{dt}{2}$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx = \frac{1}{2}\int\frac{dt}{\sqrt{t}} = \frac{1}{2}\frac{t^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{t} = \sqrt{1-x^2}$$

(iv) $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x\left(\frac{1+\sin x}{1+\cos x}\right)dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x\left(\frac{\sin x}{1+\cos x}\right)dx \text{ என்க}$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x\left(\frac{1+\sin x}{2\cos^2\frac{x}{2}}\right)dx$$

$[\because \cos x = 2\cos^2 x - 1$

$\Rightarrow 1 + \cos 2x = 2\cos^2 x]$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x\left(\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}} + \frac{\sin x}{\cos^2\frac{x}{2}}\right)dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x\left(\sec^2\frac{x}{2} + \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}\right)dx$$

$[\because \sin 2x = 2\sin x\cos x]$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x\left(\sec^2\frac{x}{2} + 2\tan\frac{x}{2}\right)dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x\,(f'(x) + f(x))\,dx$$

இங்கு $f(x) = 2\tan\frac{x}{2}$

$$= \frac{1}{2}.e^x.f(x) = \left(\frac{1}{2}e^x.2\tan\frac{x}{2}\right)\Bigg]_0^{\frac{\pi}{2}} = \left[e^x\tan\frac{x}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= e^{\frac{\pi}{2}}\tan\frac{\pi}{4} - e^0\tan 0 = e^{\frac{\pi}{2}}(1)$$

$$\therefore I = e^{\frac{\pi}{2}}$$

orders@surabooks.com PH:9600175757 / 8124301000
www.surabooks.com

This is Only for Sample for Full Book Order Online or Available at All Leading Bookstores

(v) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos\theta}\sin^3\theta\, d\theta$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos\theta}\,\sin^2\theta\,\sin\theta\, d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{\frac{1}{2}}\theta\,(1-\cos^2\theta)\sin\theta\, d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\cos^{\frac{1}{2}}\theta - \cos^{\frac{5}{2}}\theta\right)\sin\theta\, d\theta$$

$\cos\theta = t$
என பிரதியிடுக
$\Rightarrow -\sin\theta\, d\theta = dt$
$\Rightarrow \sin\theta\, d\theta = -dt$

θ	0	$\frac{\pi}{2}$
t	1	0

$$= -\int_1^0 (t^{\frac{1}{2}} - t^{\frac{5}{2}})dt = \int_0^1 (t^{\frac{1}{2}} - t^{\frac{5}{2}})dt$$

$$= \left[\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{t^{\frac{7}{2}}}{\frac{7}{2}}\right]_0^1 = \left[\frac{2}{3}(1) - \frac{2}{7}(1) - 0\right]$$

$$= \frac{2}{3} - \frac{2}{7} = \frac{14-6}{21} = \frac{8}{21}$$

(vi) $\int_0^1 \frac{1-x^2}{\left(1+x^2\right)^2}dx$

$$I = \int_0^1 \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}dx$$

[x–ஆல் தொகுதி மற்றும் பகுதியை வகுக்க]

$$I = \int_0^1 \frac{\frac{1}{x^2} - \frac{x^2}{x^2}}{\left(\frac{1}{x} + \frac{x^2}{x}\right)^2}dx = \int_0^1 \frac{\frac{1}{x^2} - 1}{\left(\frac{1}{x} + x\right)^2}dx$$

$x + \frac{1}{x} = t$ என பிரதியிடுக
$\Rightarrow (1 - \frac{1}{x^2})dx = dt$
$\Rightarrow (\frac{1}{x^2} - 1)dx = -dt$

x	0	1
t	∞	2

$$\therefore I = \int_\infty^2 -\frac{dt}{t^2} = \int_2^\infty \frac{dt}{t^2}$$

$$= \int_2^\infty t^{-2}\, dt = \left[\frac{t^{-1}}{-1}\right]_2^\infty = \left[-\frac{1}{t}\right]_2^\infty$$

$$= -\frac{1}{\infty} + \frac{1}{2} = 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \int_0^1 \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}dx = \frac{1}{2}$$

2. **பின்வரும் வரையறுத்த தொகையிடல்களை, தொகையிடலின் பண்புகளைப் பயன்படுத்தி மதிப்பு காண்க :**

(i) $\int_{-5}^{5} x\cos\left(\frac{e^x - 1}{e^x + 1}\right)dx$

(ii) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(x^5 + x\cos x + \tan^3 x + 1\right)dx$

(iii) $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 x\, dx$

(iv) $\int_0^{2\pi} x\log\left(\frac{3+\cos x}{3-\cos x}\right)dx$ [பிடிஎ - 4]

(v) $\int_0^{2\pi} \sin^4 x\cos^3 x\, dx$ **(vi)** $\int_0^1 |5x-3|\, dx$

(vii) $\int_0^{\sin^2 x} \sin^{-1}\sqrt{t}\, dt + \int_0^{\cos^2 x} \cos^{-1}\sqrt{t}\, dt$

(viii) $\int_0^1 \frac{\log(1+x)}{1+x^2}dx$ **(ix)** $\int_0^\pi \frac{x\sin x}{1+\sin x}dx$

orders@surabooks.com PH:9600175757 / 8124301000

This is Only for Sample for Full Book Order Online or Available at All Leading Bookstores

அத்தியாயம்

10

சாதாரண வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகள்

முக்கிய வரையறைகள்

- ஒரு வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டில் காணப்படும் மிக உயர்ந்த வகைக்கெழுவின் வரிசையே அச்சமன்பாட்டின் **வரிசை** (order) ஆகும்.
- ஒரு வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டை பல்லுறுப்புக் கோவை வடிவில் எழுத இயலுமெனில், அச்சமன்பாட்டில் தோன்றும் மிக உயர்ந்த வரிசையுடைய வகைக்கெழுவின் முழு எண் படியே அச்சமன்பாட்டின் **படி** எனப்படும்.
- ஒரு வகைக்கெழுச் சமன்பாடு ஒரேயொரு சாரா மாறியைப் பொறுத்து ஒன்று அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட சார்புகளின் சாதாரண வகைக்கெழுக்களைக் கொண்டுள்ளது எனில், அச்சமன்பாடு சாதாரண **வகைக்கெழுச் சமன்பாடு** எனப்படும்.
- ஒரு வகைக்கெழுச் சமன்பாடு ஒன்று அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட சார்புகளின் பகுதி வகைக்கெழுக்களை மட்டும் கொண்டிருக்கும் எனில், அச்சமன்பாடு **பகுதி வகைக்கெழுச் சமன்பாடு** எனப்படும்.
- $a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)\, y^{n-1} + \ldots + a_1(x)y + a_0 = g(x)$ என்ற சமன்பாட்டில் $g(x) = 0$ எனில் அச்சமன்பாடு **சமபடித்தான சமன்பாடு** எனப்படும்.
- ஒரு வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டின் தீர்வில் உள்ள மாறத்தக்க மாறிலிகளின் (எதேச்சை மாறிலிகளின்) எண்ணிக்கையானது, அவ்வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டின் வரிசைக்குச் சமமாக இருப்பின், அத்தீர்வினை அச்சமன்பாட்டின் பொதுத் தீர்வு என்கிறோம்.
- தொகையீட்டுக் காரணி I.F = $e^{\int pdx}$ $\frac{dy}{dx} + \text{P}y = \text{Q}.$
- $\frac{dy}{dx} + \text{P}y = \text{Q}$ இன் தீர்வு $ye^{\int pdx} = \int \text{Q}e^{\int pdx}dx + \text{C}$

orders@surabooks.com PH:9600175757 / 8124301000

This is Only for Sample for Full Book Order Online or Available at All Leading Bookstores

நினைவில் கொள்ள வேண்டிய சூத்திரங்கள்

- ஏதேனும் ஒரு சமன்பாடு ஒரு சார்பின் குறைந்தபட்சம் ஒரு சாதாரண வகைக்கெழு அல்லது பகுதி வகைக்கெழுவையாவது கொண்டிருக்குமானால் அச்சமன்பாடு வகைக்கெழுச் சமன்பாடாகும்.
- ஒரு வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டில் காணப்படும் மிக உயர்ந்த வகைக்கெழுவின் வரிசையே அச்சமன்பாட்டின் வரிசை (order) ஆகும்.
- ஒரு வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டை பல்லுறுப்புக் கோவை வடிவில் எழுத இயலுமெனில், அச்சமன்பாட்டில் தோன்றும் மிக உயர்ந்த வரிசையுடைய வகைக்கெழுவின் முழு எண் படியே அச்சமன்பாட்டின் படி எனப்படும்.
- ஒரு வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டை மிக உயர்ந்த வரிசைக் கொண்ட வகைக்கெழுவை முதன்மை உறுப்பாகக் கொண்ட பல்லுறுப்புக் கோவைச் சமன்பாடாக எழுத இயலவில்லை எனில் அச்சமன்பாட்டின் படியை வரையறுக்க முடியாது.
- ஒரு வகைக்கெழுச் சமன்பாடு ஒரேயொரு சாரா மாறியைப் பொருத்து ஒன்று அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட சார்புகளின் சாதாரண வகைக்கெழுக்களைக் கொண்டுள்ளது எனில், அச்சமன்பாடு சாதாரண வகைக்கெழுச் சமன்பாடு எனப்படும்.
- ஒரு வகைக்கெழுச் சமன்பாடு ஒன்று அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட சார்புகளின் பகுதி வகைக்கெழுக்களை மட்டும் கொண்டிருக்கும் எனில், அச்சமன்பாடு பகுதி வகைக்கெழுச் சமன்பாடு எனப்படும்.
- ஒரு மாறிலியைக் கொண்ட சமன்பாட்டிலிருந்து அம்மாறிலியை நீக்குவதால் முதல் வரிசை வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டையும் மற்றும் இரண்டு மாறிலிகளைக் கொண்ட சமன்பாட்டிலிருந்து இரண்டு மாறிலிகளையும் நீக்குவதால் இரண்டாம் வரிசை வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டையும் மற்றும் இதேபோல் தொடர, நீக்கப்படும் மாறிலிகளின் எண்ணிக்கைகேற்ப வரிசைகளைக் கொண்ட வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகளைப் பெறலாம்.
- ஒரு வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டினை நிறைவு செய்யுமாறு சார்ந்த மாறிகளை சாரா மாறிகளுடன் தொடர்புபடுத்தும் கோவை அச்சமன்பாட்டின் தீர்வு ஆகும்.
- ஒரு வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டின் தீர்வில் உள்ள மாறத்தக்க மாறிலிகளின் (ஏதேச்சை மாறிலிகளின்) எண்ணிக்கையானது, அவ்வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டின் வரிசைக்குச் சமமாக இருப்பின், அத்தீர்வினை அச்சமன்பாட்டின் பொதுத் தீர்வு என்கிறோம்.
- ஒரு வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டின் பொதுத்தீர்வில் உள்ள மாறத்தக்க மாறிலிகளுக்கு குறிப்பிட்ட மதிப்புகளைக் கொடுப்பதால் பெறப்படும் தீர்வினை குறிப்பிட்ட தீர்வு என்போம்.
- $f_1(x)\, g_1(y)\, dx + f_2(x)\, g_2(y)\, dy = 0$ எனும் வடிவில் உள்ள சமன்பாடு மாறிகள் பிரிபடக்கூடியது அல்லது மாறிகள் பிரிபடக்கூடிய சமன்பாடு எனப்படும்.
- $n \in \mathbb{R}$ மற்றும் பொருத்தமாக கட்டுப்படுத்தப்பட்ட x, y மற்றும் t ஆகியவற்றுக்கு $f(tx, ty) = t^n f(x, y)$ எனில், x, y ஆகியவற்றை மாறிகளாக் கொண்ட சார்பு $f(x, y)$ ஆனது nஆம் படியில் சமபடித்தான சார்பு எனப்படும். இது ஆய்லரின் சமபடித்தன்மை எனவும் அழைக்கப்படும்.
- $f(x, y)$ என்பது படி 0 கொண்ட சமபடித்தான சார்பு எனில், $f(x, y)$ என்பதை எப்பொழுதும் $g\left(\frac{y}{x}\right)$ அல்லது $g\left(\frac{x}{y}\right)$ எனும் வடிவில் எழுதுமாறு எனும் சார்பு இருக்கும்.
- ஒரு சாதாரண வகைக்கெழு சமன்பாட்டை $\frac{dy}{dx} = g\left(\frac{y}{x}\right)$ எனும் அமைப்பில் எழுத முடியுமானால், அச்சமன்பாடு சமபடித்தான அமைப்பில் உள்ள வகைக்கெழு சமன்பாடு எனப்படும்.

orders@surabooks.com PH:9600175757 / 8124301000

This is Only for Sample for Full Book Order Online or Available at All Leading Bookstores

- முதல் வரிசை நேரியல் வகைக்கெழு சமன்பாட்டின் வடிவம் $\frac{dy}{dx}+\text{P}y=\text{Q}$ ஆகும். இங்கு P மற்றும் Q என்பன x-இல் மட்டுமே உள்ள சார்புகளாகும். இச்சமன்பாட்டில் y மற்றும் அதன் வகைக்கெழு $\frac{dy}{dx}$ இவ்விரண்டின் பெருக்கல் பலன் இருக்காது. மேலும் சார்ந்த மாறி y மற்றும் சாராமாறி x-ஐப் பொருத்த அதனுடைய வகைக்கெழு ஆகியவை முதலாம் படியாக மட்டுமே காணப்படும். கொடுக்கப்பட்ட வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டின் தீர்வு $ye^{\int \text{P}dx}=\int \text{Q}e^{\int \text{P}dx}dx+\text{C}$ எனக் கிடைக்கிறது. இங்கு $e^{\int \text{P}dx}$ என்பது சமன்பாடு (1)-ன் தொகையீட்டுக் காரணி (தொ.கா) எனப்படும்.
- $\frac{dx}{dy}+\text{P}x=\text{Q}$ என்ற முதல் வரிசை நேரியல் சமன்பாட்டில் P மற்றும் Q என்பன y-ல் மட்டுமே உள்ள சார்புகளாகும். இச்சமன்பாட்டில் x மற்றும் $\frac{dy}{dx}$ இவ்விரண்டும் பெருக்கலாக இருக்காது.
- மேலும் சார்ந்த மாறி x மற்றும் சாராமாறி y-ஐப் பொருத்த அதன் வகைக்கெழு ஆகியவற்றின் படி 1 ஆக மட்டுமே காணப்படும். இவ்வகையில், வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டின் தீர்வு $xe^{\int \text{P}dy}=\int \text{Q}e^{\int \text{P}dy}dy+\text{C}$ ஆகும்.
- t நேரத்தில் ஒரு பொருளின் இருப்பு x எனில், t நேரத்தில் அப்பொருளின் இருப்பின் கணநேர மாறுவீதம் $\frac{dx}{dt}$ ஆகும்.

பயிற்சி 10.1

1. பின்வரும் வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகள் ஒவ்வொன்றின் வரிசை மற்றும் படி (இருக்குமானால்) ஆகியவற்றைத் தீர்மானிக்க.

(i) $\frac{dy}{dx}+xy=\cot x$

(ii) $\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)^{\frac{2}{3}}-3\frac{d^2y}{dx^2}+5\frac{dy}{dx}+4=0$

(iii) $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=x\sin\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)$ [பிடிஏ - 1]

(iv) $\sqrt{\frac{dy}{dx}}-4\frac{dy}{dx}-7x=0$

(v) $y\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{x}{\left(\frac{dy}{dx}\right)+\left(\frac{dy}{dx}\right)^3}$ [பிடிஏ - 4]

(vi) $x^2\frac{d^2y}{dx^2}+\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}=0$

(vii) $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^3=\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)}$

(viii) $\frac{d^2y}{dx^2}=xy+\cos\left(\frac{dy}{dx}\right)$

(ix) $\frac{d^2y}{dx^2}+5\frac{dy}{dx}+\int y\,dx=x^3$

(x) $x=e^{xy\left(\frac{dy}{dx}\right)}$

தீர்வு : (i) $\frac{dy}{dx}+xy=\cot x$

கொடுக்கப்பட்ட வகைக்கெழு சமன்பாடு

$$\frac{dy}{dx}+xy = \cot x.$$

மிக உயர்ந்த வகைக்கெழு 1 மற்றும் அதனுடைய அடுக்கு 1

வரிசை 1, படி 1.

(ii) $\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)^{\frac{2}{3}}-3\frac{d^2y}{dx^2}+5\frac{dy}{dx}+4=0$

கொடுக்கப்பட்ட வகைக்கெழு சமன்பாடு

$$\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)^{\frac{2}{3}}-3\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)+5\frac{dy}{dx}+4=0$$

$$\Rightarrow \left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)^{\frac{2}{3}} = 3\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)-5\left(\frac{dy}{dx}\right)-4$$

This is Only for Sample for Full Book Order Online or Available at All Leading Bookstores

மூன்றின் அடுக்கை இருபுறமும் எடுக்க கிடைப்பது,

$$\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)^2 = \left(3\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)-5\left(\frac{dy}{dx}\right)-4\right)^3$$

மிக உயர்ந்த வகைக்கெழு 3 மற்றும் அதனுடைய அடுக்கு 2.

∴ வரிசை 3, படி 2.

(iii) $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = x\sin\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)$

மிக உயர்ந்த வகைக்கெழு 2

∴வரிசை 2

கொடுக்கப்பட்ட வகைக்கெழு சமன்பாட்டை வகைக்கெழுக்களால் ஆன பல்லுறுப்புக் கோவையாக எழுத இயலவில்லை. ஆதனால் அதனுடைய படி வரையறுக்கப்படவில்லை.

(iv) $\sqrt{\frac{dy}{dx}}-4\frac{dy}{dx}-7x=0$

கொடுக்கப்பட்ட வகைக்கெழு சமன்பாடு

$$\sqrt{\frac{dy}{dx}} = 4\frac{dy}{dx}+7x$$

இருபுறமும் வர்க்கப்படுத்த,

$$\frac{dy}{dx} = \left(4\frac{dy}{dx}+7x\right)^2$$

$$= 16\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+49x^2+56x\left(\frac{dy}{dx}\right)$$

மிக உயர்ந்த வகைக்கெழு 1 மற்றும் அதனுடைய அதிகபட்ச அடுக்கு 2.

∴ வரிசை 1, படி 2.

(v) $y\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{x}{\left(\frac{dy}{dx}\right)+\left(\frac{dy}{dx}\right)^3}$

கொடுக்கப்பட்ட வகைக்கெழு சமன்பாடு

$$y\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{x}{\left(\frac{dy}{dx}\right)+\left(\frac{dy}{dx}\right)^3}$$

$$\Rightarrow y\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+y\left(\frac{dy}{dx}\right)^4 = x$$

அதிகபட்ச வகைக்கெழு 1 மற்றும் அதனுடைய உயரிய அடுக்கு 4.

∴ வரிசை 4, படி 1

(vi) $x^2\frac{d^2y}{dx^2}+\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}=0$

கொடுக்கப்பட்ட வகைக்கெழு சமன்பாடு

$$x^2\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)+\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} = 0$$

$$x^2\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = -\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$= -\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

இருபுறமும் வகைப்படுத்த,

$$x^4\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 = 1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$$

உயரிய வகைக்கெழு 2 மற்றும் அதனுடைய அடுக்கு 2.

∴ வரிசை 2, படி 2.

(vii) $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^3=\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)}$

கொடுக்கப்பட்ட வகைக்கெழு சமன்பாடு

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^3 = \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)}$$

இருபுறமும் வர்க்கப்படுத்த கிடைப்பது,

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^6 = 1+\left(\frac{dy}{dx}\right)$$

உயரிய வகைக்கெழு 2 மற்றும் அதனுடைய அடுக்கு 6.

∴ வரிசை 2, படி 6.

(viii) $\frac{d^2y}{dx^2}=xy+\cos\left(\frac{dy}{dx}\right)$

கொடுக்கப்பட்ட வகைக்கெழு சமன்பாடு

$$\frac{d^2y}{dx^2} = xy+\cos\left(\frac{dy}{dx}\right)$$

உயரிய வகைக்கெழு 2.

∴ வரிசை 2.

இச்சமன்பாடு வகைக்கெழுக்களை கொண்ட பல்லுறுப்புக் கோவைச் சமன்பாடல்ல. ஆகவே, இச்சமன்பாட்டின் படி வரையறுக்கப்படவில்லை.

www.surabooks.com

This is Only for Sample for Full Book Order Online or Available at All Leading Bookstores

(ix) $\dfrac{d^2y}{dx^2}+5\dfrac{dy}{dx}+\int ydx = x^3$

கொடுக்கப்பட்ட வகைக்கெழு சமன்பாடு

$$\frac{d^2y}{dx^2}+5\frac{dy}{dx}+\int ydx = x^3.$$

'x'-ஐ பொறுத்து மீண்டும் வகையிட கிடைப்பது,

$$\frac{d^3y}{dx^3}+5\frac{d^2y}{dx^2}+y = 3x^2$$

உயரிய வகைக்கெழு 3 மற்றும் அதனுடைய அடுக்கு 1.

∴ வரிசை 3 மற்றும் படி 1.

(x) $x = e^{xy\left(\frac{dy}{dx}\right)}$

கொடுக்கப்பட்ட வகைக்கெழு சமன்பாடு

$$x = e^{xy\left(\frac{dy}{dx}\right)}$$

$$\Rightarrow \log x = xy\left(\frac{dy}{dx}\right)$$

உயரிய வகைக்கெழு 1.

∴ படி 1.

இச்சமன்பாடு வகைக்கெழுக்களை கொண்ட பல்லுறுப்புக் கோவைச் சமன்பாடல்ல. ஆகவே, இச்சமன்பாட்டின் படி வரையறுக்கப்படவில்லை.

பயிற்சி 10.2

1. பின்வரும் இயற்பியல் கூற்றுகள் ஒவ்வொன்றையும், வகைக்கெழுச் சமன்பாடாக எழுதுக.

(i) ரேடியம் சிதைவுறும் வீதமானது காணப்படும் அளவு Q-க்கு நேர்விகிதத்தில் இருக்கும்.

(ii) ஒரு நகரத்தின் மக்கள் தொகை P ஆனது, மக்கள்தொகை மற்றும் 5,00,000-க்கும் மக்கள் தொகைக்கும் உள்ள வேறுபாடு ஆகியவற்றை பெருக்கிக் கிடைக்கும் மதிப்புக்கு நேர்விகிதத்தில் அதிகரிக்கிறது.

(iii) ஒரு பொருளின் வெப்பநிலை Tஐப் பொருத்து ஆவி அழுத்தம் P-ன் மாறுவீதமானது, ஆவி அழுத்தத்திற்கு நேர்விகிதத்திலும், வெப்பநிலையின் வர்க்கத்திற்கு எதிர்விகிதத்திலும் உள்ளது.

(iv) ஒரு சேமிப்புத் தொகைக்கு ஒரு வருடத்திற்கு வழங்கப்படும் 8% வட்டித் தொகையானது தொடர்ச்சியாக அசலுடன் சேர்க்கப்படுகிறது. மேலும், மற்றொரு முதலீட்டிலிருந்து ஒவ்வொரு ஆண்டும் கிடைக்கும் வரவு ₹400 இத்தொகையுடன் தொடர்ச்சியாக சேர்க்கப்படுகிறது.

தீர்வு : (i) Q ஆனது ரேடியத்தின் அளவைக் குறிக்கும் என்க.

கொடுக்கப்பட்டது $\dfrac{dQ}{dt} \propto Q$

$\dfrac{dQ}{dt} = kQ$ இங்கு k ஒரு மாறிலி.

(ii) ஒரு நகரத்தின் மக்கள் தொகை P என்க.

கொடுக்கப்பட்டது $\dfrac{dP}{dt} \propto P(5,00,000 - P)$

∵ [P மற்றும் (50,000 – P) இன் பெருக்கல் பலன்]

$$\Rightarrow \frac{dP}{dt} = kP(5,00,000 - P)$$

இங்கு k ஒரு மாறிலி.

(iii) ஆவி அழுத்தத்தை P குறிக்கிறது மற்றும் ஆவி வெப்பத்தை T குறிக்கிறது என்க.

கொடுக்கப்பட்டது $\dfrac{dP}{dt} \propto P\cdot\dfrac{1}{T^2}$

[∴ வெப்பநிலையின் வர்க்கத்திற்கு எதிர்விகிதத்தில் உள்ளது]

$\Rightarrow \dfrac{dP}{dt} = \dfrac{kP}{T^2}$ இங்கு k ஒரு மாறிலி.

(iv) x என்பது சேமிப்புக் கணக்கிலுள்ள அசலைக் குறிக்கிறது என்க.

R = 8% மற்றும் N = 1.

∴ வட்டி $= \dfrac{PNR}{100} = \dfrac{x\times1\times8}{100} = \dfrac{2x}{25}$

கொடுக்கப்பட்டது

$\dfrac{dx}{dt}$ = வட்டி + ₹ 400.

$$\therefore \frac{dx}{dt} = \frac{2x}{25}+400$$

2. ஒரு கோள வடிவ மழைத்துளியானது அதன் வளைபரப்பின் மாறுவீதத்திற்கு நேர்விகிதத்தில் ஆவியாகிறது. மழைத்துளியின் ஆரத்தின் மாறுவீதத்தை உள்ளடக்கிய வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டை உருவாக்குக. [பிடிஏ - 2]

தீர்வு : V கோள மழை துளியின் கன அளவு மற்றும் A வளைபரப்பு மற்றும் r ஆரம் என்க.

This is Only for Sample for Full Book Order Online or Available at All Leading Bookstores

$$\therefore V = \frac{4}{3}\pi r^3 \text{ மற்றும்}$$
$$A = 4\pi r^2$$

கொடுக்கப்பட்டது

$$\frac{dV}{dt} = -kA$$

[$\because$ மழைத்துளி ஆவியாகிறது]

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right) = -k(4\pi r^2)$$
$$\Rightarrow \frac{4}{3}\pi.\frac{d}{dt}(r^3) = -4k\pi r^2$$
$$\Rightarrow \frac{4}{3}.\pi.3r^2.\frac{dr}{dt} = -4k\pi r^2$$
$$\Rightarrow \frac{dr}{dt} = -k$$

என்பது தேவையான வகைக்கெழு சமன்பாடு.

பயிற்சி 10.3

1. ஒரு தளத்தில் (i) நேர்க்குத்து அல்லாத நேர்க்கோடுகள் (ii) கிடைமட்டம் அல்லாத நேர்க்கோடுகள் ஆகிய தொகுப்புகளின் வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

தீர்வு :

(i) ஒருதளத்தில் நேர்க்குத்து அல்லாத நேர்க்கோடுகள் குடும்பத்தின் சமன்பாடு $ax + by = 1$, $b \neq 0$, $a \in \mathbb{R}$.

'x'-ஐப் பொறுத்து வகையிட கிடைப்பது,

$$a + b\frac{dy}{dx} = 0$$

'x' -ஐப் பொறுத்து மீண்டும் வகையிட கிடைப்பது,

$$b\frac{d^2y}{dx^2} = 0 \Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = 0 \quad [\because b \neq 0]$$

(ii) ஒரு தளத்தில் கிடைமட்டம் அல்லாத நேர்க்கோடுகள் குடும்பத்தின் சமன்பாடு $ax + by = 1$, $a \neq 0$, மற்றும் $b \in \mathbb{R}$.

'y'-ஐப் பொறுத்து வகையிட கிடைப்பது,

$$a\frac{dx}{dy} + b = 0$$

மீண்டும் 'y'-ஐப் பொறுத்து வகையிட கிடைப்பது,

$$a\frac{d^2x}{dy^2} = 0 \Rightarrow \frac{d^2x}{dy^2} = 0 \quad [\because a \neq 0]$$

2. $x^2 + y^2 = r^2$ எனும் வட்டத்தைத் தொடும் எல்லா நேர்க்கோடுகளின் வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டைக் காண்க.

தீர்வு : $x^2 + y^2 = r^2$ வட்டத்தை தொடுகின்ற கோடுகளின் குடும்பத்தின் சமன்பாடு $y = mx + c$ என்க. ...(1)

$x^2 + y^2 = r^2$ என்ற வட்டத்திற்கு $y = mx + c$ என்ற தொடுகோடாக இருக்க நிபந்தனை $c^2 = r^2(1 + m^2)$

$$c = \pm r\sqrt{1+m^2} \quad ...(2)$$

சமன்பாடு (2) ஐ (1)ல் பிரதியிட கிடைப்பது,

$$y = mx + r\sqrt{1+m^2}$$
$$\Rightarrow y - mx = \pm r\sqrt{1+m^2} \quad ...(3)$$

(1) லிருந்து, $\frac{dy}{dx} = m$ ... (4)

(4) ஐ (3) ல் பிரதியிட கிடைப்பது,

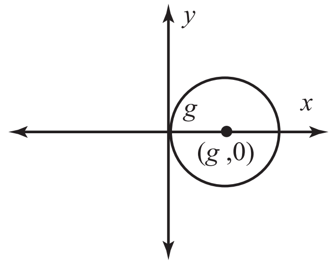
$$y - x\left(\frac{dy}{dx}\right) = \pm r\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

இருபுறமும் வர்க்கப்படுத்த கிடைப்பது,

$$\Rightarrow \left[y - x\left(\frac{dy}{dx}\right)\right]^2 = r^2\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]$$

3. ஆதிப்புள்ளி வழியாகச் செல்லும், மையத்தினை x-அச்சின் மீது கொண்ட எல்லா வட்டங்களின் வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டைக் காண்க.

தீர்வு : மையத்தினை x-அச்சின் மீது கொண்டுள்ளதால், $(g, 0)$ மற்றும் ஆரம் g என்க.



வட்டத்தின் சமன்பாடு

$$(x - g)^2 + (y - 0)^2 = g^2$$
$$\Rightarrow x^2 - 2xg + g^2 + y^2 = g^2$$
$$\Rightarrow x^2 - 2xg + y^2 = 0 \quad ...(1)$$

'x'ஐ பொறுத்து வகையிட கிடைப்பது,

$$\Rightarrow 2x - 2g(1) + 2y\frac{dy}{dx} = 0$$
$$\Rightarrow 2x + 2y\frac{dy}{dx} = 2g$$
$$\Rightarrow x + y\frac{dy}{dx} = g \quad ...(2)$$

www.surabooks.com

This is Only for Sample for Full Book Order Online or Available at All Leading Bookstores

அத்தியாயம்

11

நிகழ்தகவு பரவல்கள்

முக்கிய வரையறைகள்

- கூறுவெளி S–லிருந்து மெய்யெண்கள் $\mathbb{R}$ –க்கு வரையறுக்கப்படும் X எனும் ஒரு சமவாய்ப்பு மாறி, X–இன் வீச்சு எண்ணிடதக்கதாக இருந்தால் தனிநிலை சமவாய்ப்பு மாறியாகும். அதாவது, முடிவுறு அல்லது எண்ணிடதக்க முடிவுறா எண் மதிப்புகளை மட்டுமே கொண்டிருக்கும். இங்கு S கணத்தில் உள்ள ஒவ்வொரு மதிப்பின் நிகழ்தகவும் மிகையெண் நிகழ்தகவுக் கொண்டதாகவும், நிகழ்தகவுகளின் மொத்த கூடுதல் ஒன்றாகவும் இருக்கும்.
- X என்பது ஒரு தனிநிலை சமவாய்ப்பு மாறிலி எனில் $f(x_k) = P(x = x_k)$, $k = 1, 2, 3 \ldots n$ என்பது நிகழ்தகவு X நிறைச் சார்பாக வரையறுக்கப்படுகிறது.
- $x_1 < x_2 < x_3 \ldots$ எனும்படி $x_1, x_2, x_3 \ldots$ மதிப்புகளுக்கு $F(x)$–ஐ நிகழ்தகவு நிறைச் சார்பாகக் கொண்டிருக்கும் தனிநிலை சமவாய்ப்பு மாறி X –இன் குவிவு பரவல் சார்பு $F(x)$–இன் நிகழ்தகவு நிறைச்சார்பு $F(x) = P(X \le x) = \sum_{x_i \le x} f(x_i)$, $x \in \mathbb{R}$ ஆகும்.
- S என்பது ஒரு கூறுவெளி என்க. $X:S \to \mathbb{R}$ எனும் ஒரு சமவாய்ப்பு மாறி $\mathbb{R}$–ன் ஒரு கணமான I –ல் ஏதேனும் மதிப்பைப் பெறும் என்க. I –இல் உள்ள அனைத்து x –க்கும் $P(X= x) = 0$ என்பது X –இன் ஒரு தொடர்ச்சியான சமவாய்ப்பு மாறியாகும்.
- X (வெற்றி) = 1 மற்றும் X (தோல்வி) = 0 என வரையறுக்கப்படும் ஒரு பெர்னோலி சோதனையுடன் இணைந்த சமவாய்ப்பு மாறி X –க்கு ,
  $$f(x) = \begin{cases} p & , \ x = 1 \\ q = 1 - p & , \ x = 0 \end{cases}$$ இங்கு $0 < p < 1$.
- X என்பது பெர்னோலி சமவாய்ப்பு மாறி எனவும் மற்றும் $f(x)$ என்பது பெர்னோலி பரவல் எனவும் முறையே அழைக்கப்படுகிறது.
- ஈருறுப்பு சமவாய்ப்பு மாறி X என்பது n–சார்பற்ற முயற்சிகளில் வெற்றிகளின் எண்ணிக்கையைக் குறிக்கிறது என்க . வெற்றிக்கான நிகழ்தகவு p எனக் கொண்டால், தோல்விக்கான நிகழ்தகவு $q = 1- p$ ஆகும். ஈருறுப்பு பரவலை $X \sim B(n, p)$ எனக் குறிப்பர் .
- X –ன் நிகழ்தகவு நிறை சார்பு $f(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$, $x = 0, 1, 2, \ldots n$ ஆகும்.

orders@surabooks.com PH:9600175757 / 8124301000

This is Only for Sample for Full Book Order Online or Available at All Leading Bookstores

நினைவில் கொள்ள வேண்டிய சூத்திரங்கள்

$f(x)$ எனும் சார்பு $x_1, x_2, x_3 \dots x_n$ ... என்ற மெய்யெண் மதிப்புகளுக்கு நிகழ்தகவுச் சார்பாக தேவையானதும் மற்றும் போதுமானதுமான நிபந்தனைகளாகக் கீழ்க்காணும் பண்புகளைக் கொண்டிருக்க வேண்டும்.

(i) $f(x_k) \geq 0, k = 1, 2, 3, . . n$ மற்றும்

(ii) $\sum_k f(x_k) = 1$

✦ குவிவு பரவல் சார்பு $F(x) = p(x \leq x) = \sum_{x_i \leq x} f(x_i) = \sum p(X = x_i)$

குவிவு பரவல் சார்பு பண்புகள்

(i) $0 \leq F(x) \leq 1 \ \forall\ x \in R$

(ii) $x < y$ எனில் $F(x) \leq F(y)$

(iii) $\lim_{x \to a} F(x) = F(a)$

(iv) $\lim_{x \to \infty} F(x) = F(-\infty) = 0$

(v) $\lim_{x \to \infty} F(x) = F(\infty) = 1$

(vi) $p(x_1 < x < x_2) = F(x_2) - F(x_1)$

(vii) $p(X > x) = 1 - p(X \leq x)\ 1 - F(x)$

(viii) $F(x = x_k) = F(x_k) - F(x_k - 1)$

✦ ஒரு தொடர்ச்சியான சமவாய்ப்பு மாறி X -க்கு $f(\cdot)$ ஒரு நிகழ்தகவு சார்பாக இருக்க வேண்டுமெனில்

(i) $f(x) \geq 0 \ \forall\ x$ (ii) $\int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx = 1$

✦ $f(x) = \dfrac{dF(x)}{dx} = F'(x)$. வகையீடு இருக்கும் இடத்திலெல்லாம்

✦ $E(x) = \begin{cases} \sum_x xf(x), & x \text{ ஒரு தனிநிலைமாறி எனில்} \\ \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)dx, & X \text{ ஒரு தொடர்ச்சியான எனில்} \end{cases}$

✦ $E(x(g)) = \begin{cases} \sum_x g(x)\ f(x), & g(x) \text{ ஒரு தனிநிலைமாறி எனில்} \\ \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f(x)\,dx, & g(x) \text{ ஒரு தொடர்ச்சியான எனில்} \end{cases}$

✦ பரவற்படி $= V(x) = E(x - E(x))^2 = E(x - \mu)^2$

✦ திட்ட விளக்கம் $\sigma = \sqrt{v(x)}$

www.surabooks.com

This is Only for Sample for Full Book Order Online or Available at All Leading Bookstores

கணித எதிர்பார்ப்பு மற்றும் பரவற்படியின் பண்புகள்

(i) $E(ax + b) = a\,E(x) + b$ இங்கு a மற்றும் b மாறிலிகள்

(ii) $\text{Var}(x) = E(x^2) - [E(x)]^2$

(iii) $\text{Var}(ax + b) = a^2\,\text{Var}(x)$.

ஒரு புள்ளி பரவல்

✦ $f(x) = P(X = x_0) = 1$ என வரையறுக்கப்படும் நிகழ்தகவு நிறை சார்பு $f(x)$-ன்படி ஒரு புள்ளி x_0 இருக்குமானால், சமவாய்ப்பு மாறி X -க்கு, ஒரு புள்ளி பரவற்படி அமையும்.

இரு புள்ளி பரவல்

✦ சமச்சீரற்ற வகை : $f(x) = \begin{cases} p, & x = x_1 \\ 1-p, & x = x_2 \end{cases}$ இங்கு $0 < p < 1$

என அமையுமாறு இரு மதிப்புகள் x_1 மற்றும் x_2 இருக்குமானால் சமவாய்ப்பு மாறி X -க்கு இரு புள்ளி பரவல் உண்டு.

குவிவு பரவல் சார்பு

✦ $F(x) = \begin{cases} 0, & x < x_1 \\ p, & x_1 \le x < x_2 \\ 1, & x \ge x_2 \end{cases}$

பெர்னோலி பரவலுக்கு

✦ $\mu = p$ மற்றும் $\sigma^2 = pq$

ஈருறுப்பு பரவலுக்கு

✦ $\mu = np$ மற்றும் $\sigma^2 = np(1-p)$.

பயிற்சி 11.1

1. X என்பது மூன்று சீரான நாணயங்களை ஒரே சமயத்தில் ஒரு முறைச் சுண்டும்போது விழும் பூக்களின் எண்ணிக்கை என்க. சமவாய்ப்பு மாறியான X-இன் மதிப்புகளையும் அதன் நேர்மாறு பிம்பங்களில் உள்ள புள்ளிகளின் எண்ணிக்கையையும் காண்க

தீர்வு : மூன்று சீரான நாணயங்கள் ஒரு முறை சுண்டும் போது கூறுவெளி

s = {HHH, HHT, THH, HTH, HTT, THT, TTH, TTT}

இங்கு X என்பது பூக்களின் எண்ணிக்கையை குறிக்கிறது என்க.

X (0 பூ) = {HHH} = 1

X (1 பூ) = {HHT, THT, HTH} = 3

X (2 பூக்கள்) = {HTT, THT, TTH} = 3

X (3 பூக்கள்) = {TTT} = 1

∴ X எடுத்துக் கொள்ளும் மதிப்புகள் 0, 1, 2, 3.

சமவாய்ப்பு மாறி X இன் மதிப்புகள்	0	1	2	3	மொத்தம்
நேர்மாறு பிம்பங்களின் உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை	1	3	3	1	8

2. 52 சீட்டுகட்டுகளை உடைய ஒரு சீட்டுக்கட்டிலிருந்து இரு சீட்டுகள் ஒரே சமயத்தில் சமவாய்ப்பு முறையில் எடுக்கப்படுகின்றன. அவ்வாறு எடுக்கப்பட்ட சீட்டுகள் கருப்பாக இருப்பின் சமவாய்ப்பு மாறியான X-இன் மதிப்புகளையும் அதன் நேர்மாறு பிம்பங்களில் உள்ள புள்ளிகளின் எண்ணிக்கையையும் காண்க.

தீர்வு :

கருப்பு	மற்றவை	மொத்தம்
26	26	52

$$n(s) = 52C_2 = \frac{\overset{26}{\cancel{52}} \times 51}{1 \times \cancel{2}} = 1326$$

This is Only for Sample for Full Book Order Online or Available at All Leading Bookstores

X என்பது சமவாய்ப்பு மாறி எடுக்கப்படும் கருப்பு பந்துகளின் எண்ணிக்கையை குறிக்கிறது என்க.

$$X = 0, 1, 2$$

$$X(W) = \begin{cases} 0 \text{ கருப்பு சீட்டு இல்லாமல்} \\ 1 \text{ ஒரு கருப்பு சீட்டு} \\ 2 \text{ இரண்டு கருப்பு சீட்டு} \end{cases}$$

X (கருப்பு அல்லாத சீட்டு) $= X(0) = 26C_0 \times 26C_2 = \frac{1 \times 26 \times 25}{1 \times 2} = 325$

X ஒருப்பு கருப்பு சீட்டு $= X(1) = 26C_1 \times 26C_2 = 26 \times 26 = 676$

X (2 -ம் கருப்பு) $= X(2) = 26C_2 \times 26C_0 = \frac{\overset{13}{\cancel{26}} \times 25}{1 \times 2} = 325$

X-இன் மதிப்புகள்	0	1	2	மொத்தம்
நேர்மாறு பிம்ப புள்ளிகளின் எண்ணிக்கை	325	676	325	1326

3. ஒரு கூடையில் 5 மாங்கனிகள் மற்றும் 4 ஆப்பிள்கள் உள்ளன. அதிலிருந்து மூன்று பழங்கள் சமவாய்ப்பு முறையில் தேர்ந்தெடுக்கப்படுகின்றன. அவ்வாறு தேர்ந்தெடுக்கும் பழங்கள் ஆப்பிள்கள் எனில், சமவாய்ப்பு மாறியான X-இன் மதிப்புகளையும் அதன் நேர்மாறு பிம்பங்களில் உள்ள புள்ளிகளின் எண்ணிக்கையையும் காண்க.

தீர்வு : கூறுவெளி S = {5 மாங்கனிகள், 4 ஆப்பிள்கள்}

X எடுக்கப்பட்ட ஆப்பிள்களின் எண்ணிக்கை

X (ஆப்பிள் இல்லை) $= 5C_3 = \frac{5 \times \overset{2}{\cancel{4}} \times \cancel{3}}{\cancel{3}^1 \times \cancel{2} \times 1} = 10$

X (1ஆப்பிள்) $= 4C_1 \times 5C_2 = 4 \times \frac{5 \times \overset{2}{\cancel{4}}}{\cancel{2} \times 1} = 40$

X (2 ஆப்பிள்கள்) $= 4C_2 \times 5C_1 = \frac{\overset{2}{\cancel{4}} \times 3}{\cancel{2} \times 1} \times 5 = 30$

X (3 ஆப்பிள்கள்) $= 4C_3 \times 5C_0 = 4C_1 \times 1 = 4$

∴ X எடுத்துக் கொள்ளும் மதிப்புகள் 0, 1, 2, 3

சமவாய்ப்பு மாறிலியின் மதிப்புகள்	0	1	2	3	மொத்தம்
நேர்மாறு பிம்பங்களின் உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை	10	40	30	4	84

4. 6 சிவப்பு மற்றும் 8 கருப்பு பந்துகள் உள்ள ஒரு கொள்கலனிலிருந்து இரு பந்துகள் சீரான முறையில் தேர்ந்தெடுக்கப்படுகின்றன. அவ்வாறு தேர்ந்தெடுக்கப்படும் ஒவ்வொரு சிவப்பு பந்திற்கும் ₹ 15 வெல்வதாகவும் தேர்ந்தெடுக்கப்படும் ஒவ்வொரு கருப்பு பந்திற்கும் ₹ 10 தோற்பதாகவும் கொள்க. வெல்லும் தொகையை X குறிப்பதாகக் கொண்டால் X -இன் மதிப்புகளையும் மற்றும் அதன் நேர்மாறு பிம்பங்களில் புள்ளிகளின் எண்ணிக்கையையும் காண்க.

தீர்வு : கூறுவெளி S = {6R, 8B}.

X வெல்லும் தொகையை குறிக்கிறது என்க.

X (சிவப்பு பந்து) = ₹ 15, X (கருப்பு பந்து) = –₹ 10

X (இரண்டும் சிவப்பு பந்துகள்) = 2 (15) = ₹ 30

X (1 சிவப்பு மற்றும் 1 கருப்பு பந்து) = 15 –10 = ₹ 5

X (இரண்டும் கருப்பு பந்துகள்) = 2 (–10) = –₹ 20.

∴ X எடுத்துக் கொள்ளும் மதிப்புகள் 30, 5, –20.

X இன் நேர்மாறு பிம்பம் (இரண்டும் சிவப்பு பந்துகள்)

$$= 6C_2 = \frac{\overset{3}{\cancel{6}} \times 5}{\cancel{2} \times 1} = 15$$

ஒன்று சிவப்பு மற்றும் ஒன்று கருப்பு பந்தின் நேர்மாறு பிம்பம் $= 6C_1 \times 8C_1 = 48$

X இன் நேர்மாறு பிம்பம் (இரண்டும் கருப்பு பந்துகள்)

$$= 8C_2 = \frac{\overset{4}{\cancel{8}} \times 7}{\cancel{2} \times 1} = 28.$$

சமவாய்ப்பு மாறிலியின் மதிப்புகள்	30	5	–20	மொத்தம்
நேர்மாறு பிம்பங்களின் உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை	15	48	28	91

5. ஆறு பக்க பகடை ஒன்றின் ஒரு பக்கத்தில் '2' எனக் குறிக்கப்பட்டுள்ளது. அதன் இரண்டு பக்கங்களில் '3' எனவும், மீதமுள்ள மூன்று பக்கங்களில் '4' எனவும் உள்ளது. இருமுறை பகடை உருட்டப்படுகிறது. X என்பது இரு உருட்டல்களில் கிடைக்கும் எண்களின் கூட்டுத் தொகையை குறிக்கிறது எனில், X-இன் மதிப்புகளையும் மற்றும் அதன் நேர்மாறு பிம்பங்களில் புள்ளிகளின் எண்ணிக்கையையும் காண்க.

தீர்வு : கூறுவெளி

S = {(2,2) (2,3) (2,3) (2,4) (2,4) (2,4) (3,2) (3,3) (3,3) (3,4) (3,4) (3,4) (3,2) (3,3) (3,3) (3,4)

This is Only for Sample for Full Book Order Online or Available at All Leading Bookstores

(3,4) (3,4) (4,2) (4,3) (4,3) (4,4) (4,4) (4,4) (4,2) (4,3) (4,3) (4,4) (4,4) (4,4) (4,2) (4,3) (4,3) (4,4) (4,4) (4,4)}

இரு உருட்டல்களில் கிடைக்கும் எண்களின் கூட்டுத் தொகை X என்க.

X (4) = {(2,2)} = 1

X (5) = {(2,3) (2,3) (3,2) (3,2)} = 4

X (6) = {(2,4) (2,4) (2,4) (3,3) (3,3) (3,3) (3,3) (4,2) (4,2) (4,2)}

X (7) = {(3,4) (3,4) (3,4) (3,4) (3,4) (3,4) (4,3) (4,3) (4,3) (4,3) (4,3) (4,3)}

X (8) = {(4,4) (4,4) (4,4) (4,4) (4,4) (4,4) (4,4) (4,4) (4,4)}

சமவாய்ப்பு மாறிலியின் மதிப்புகள்	4	5	6	7	8	மொத்தம்
நேர்மாறு பிம்பங்களின் உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை	1	4	10	12	9	36

பயிற்சி 11.2

1. மூன்று சீரான நாணயங்கள் ஒரே நேரத்தில் சுண்டப்படுகின்றன. கிடைக்கும் தலைகளின் எண்ணிக்கைக்கான நிகழ்தகவு நிறை சார்பினைக் காண்க.

தீர்வு : கூறுவெளி S = {HHH, HHT, HTH, THH, HTT, THT, TTH, TTT}

x என்பது தலைகளின் எண்ணிக்கையை குறிக்கிறது என்க.

$p(x = 0)$

p(தலை இல்லை) $= p(\text{TTT}) = \frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2} = \frac{1}{8}$

$p(x = 1) = p$(1 தலை) $= p(\text{THT, HTT, TTH})$

$= \frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8} = \frac{3}{8}$ $\because p(\text{H}) = \frac{1}{2}$ மற்றும் $p(\text{T}) = \frac{1}{2}$

$p(x = 2) = p$(2 தலைகள்) $= p(\text{HHT, HTH, THH})$

$= \frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8} = \frac{3}{8}$

$p(x = 3) = p$(3 தலைகள்) $= p(\text{HHH}) = \frac{1}{8}$

∴ X எடுத்துக் கொள்ளும் மதிப்புகள் 0,1, 2, 3.

நிகழ்தகவு நிறை சார்பு

x	0	1	2	3
$f(x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

$$\therefore f(x) = \begin{cases} \frac{1}{8}, & x = 0,3 \\ \frac{3}{8}, & x = 1,2 \end{cases}$$

2. ஓர் அறுபக்க பகடையின் ஒரு பக்கத்தில் '1' எனவும், இரு பக்கங்களில் '3' மூன்று எனவும், மற்றும் ஏனைய மூன்று பக்கங்களில் '5' எனவும் குறிக்கப்பட்டுள்ளது. பகடை இருமுறை வீசப்படுகிறது. இருமுறை வீசப்பட்டதின் மொத்த எண்ணிக்கையை X குறிக்கிறது.

(i) நிகழ்தகவு நிறை சார்பு

(ii) குவிவு பரவல் சார்பு

(iii) $P(4 \le X < 10)$

(iv) $P(X \ge 6)$

தீர்வு : பகடையின் மீதுள்ள எண்கள் 1, 3, 3, 5, 5, 5 இருமுறை வீசப்பட்டதின் மொத்த எண்ணிக்கையை X குறிக்கிறதெனில், அது எடுத்துக் கொள்ளும் மதிப்புகள் 2, 4, 6, 8, 10.

கூறுவெளி S

I/II	1	3	3	5	5	5
1	2	4	4	6	6	6
3	4	6	6	8	8	8
3	4	6	6	8	8	8
5	6	8	8	10	10	10
5	6	8	8	10	10	10
5	6	8	8	10	10	10

கூறுவெளி S –சிலிருந்து நமக்கு கிடைப்பது

சமவாய்ப்பு மாறிலியின் மதிப்புகள்	2	4	6	8	10	மொத்தம்
நேர்மாறு பிம்பங்களின் உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை	1	4	10	12	9	36

$p(x = 2) = \frac{1}{36}$

$p(x = 4) = \frac{4}{36}$

orders@surabooks.com PH:9600175757 / 8124301000

This is Only for Sample for Full Book Order Online or Available at All Leading Bookstores

$p(x = 6) = \frac{10}{36}$

$p\ (x = 8) = \frac{12}{36}$

$p(x = 10) = \frac{9}{36}$

(i) நிகழ்தகவு நிறைச்சார்பு

x	2	4	6	8	10	Total
$f(x)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{12}{36}$	$\frac{9}{36}$	1

(ii) குவிவு பரவல் சார்பு

$F(x)x = p(x \leq x)$

$F(2) = \frac{1}{36}$

$F(4) = \frac{1}{36} + \frac{4}{36} = \frac{5}{36}$

$F(6) = \frac{1}{36} + \frac{4}{36} + \frac{10}{36} = \frac{15}{36}$

$F(8) = \frac{15}{36} + \frac{12}{36} = \frac{27}{36}$

$F(10) = \frac{27}{36} + \frac{9}{36} = \frac{36}{36} = 1$

∵ குவிவு பரவல் சார்பு

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 2 \\ \frac{1}{36} & 2 \leq x < 4 \\ \frac{5}{36} & 4 \leq x < 6 \\ \frac{15}{36} & 6 \leq x < 8 \\ \frac{27}{36} & 8 \leq x < 10 \\ 1 & 10 \leq x < \infty \end{cases}$$

(iii) $p(4 \leq x < 10) = p(x = 4) + p(x = 6) + p(x = 8)$

$= \frac{4}{36} + \frac{10}{36} + \frac{12}{36} = \frac{26}{36} = \frac{13}{18}$

(iv) $p(x \geq 6) = p(x = 6) + p(x = 8) + p(x = 10)$

$= \frac{10}{36} + \frac{12}{36} + \frac{9}{36} = \frac{31}{36}$

3. மகன் மற்றும் மகளுக்கு சமவாய்ப்பு நிகழ்தகவுகள் எனக் கருதி 4 குழந்தைகள் கொண்ட ஒரு குடும்பத்தில் உள்ள மகள்களின் எண்ணிக்கைக்கு நிகழ்தகவு நிறை சார்பினையும் குவிவு பரவல் சார்பினையும் காண்க.

தீர்வு : கூறுவெளி = {4 குழந்தைகள்}

கொடுக்கப்பட்ட $P(G) = P(B) = \frac{1}{2}$

x குடும்பத்தில் உள்ள மகள்களின் எண்ணிக்கையை குறிக்கிறது என்க.

$P(x = 0) = P($மகள் இல்லை$)$

$= P(BBBB) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{16}$

$P(x = 1) = P(1$ மகள்$)$

$= 4C_1 \times P = 4 \times \frac{1}{16} = \frac{1}{4}$

$P(x = 2) = P(2$ மகள்கள்$)$

$= 4C_2 \times P(GGBB)$

$= \frac{\cancel{4}^{2} \times 3}{\cancel{2} \times 1} \times \frac{1}{\cancel{16}^{8}} = \frac{3}{8}$

$P(x = 3) = P(3$ மகள்கள்$)$

$= 4C_3 \times P(GGGB) = 4 \times \frac{1}{16} = \frac{1}{4}$

$P(x = 4) = P(4$ மகள்கள்$)$

$= P(GGGG) = \frac{1}{16}$

நிகழ்தகவு நிறை சார்பு

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}, & x = 1,3 \\ \frac{1}{16}, & x = 0,4 \\ \frac{3}{8}, & x = 2 \end{cases}$$

குவிவு பரவல் சார்பு

$F(0) = \frac{1}{16}$

$F(1) = \frac{1}{16} + \frac{1}{4} = \frac{5}{16}$

$F(2) = \frac{5}{16} + \frac{3}{8} = \frac{5}{16} + \frac{6}{16} = \frac{11}{16}$

$F(3) = \frac{11}{16} + \frac{1}{4} = \frac{11}{16} + \frac{4}{16} = \frac{15}{16}$

$F(4) = \frac{15}{16} + \frac{1}{16} = \frac{16}{16} = 1$

This is Only for Sample for Full Book Order Online or Available at All Leading Bookstores

$$F(x)=\begin{cases}\frac{0}{16}, & x<0\\ \frac{1}{16}, & x\le 0\\ \frac{5}{16}, & x\le 1\\ \frac{11}{16}, & x\le 2\\ \frac{15}{16}, & x\le 3\\ 1, & x\le 4\end{cases}$$

4. ஒரு தனிநிலை சமவாய்ப்பு மாறி 0, 1, மற்றும் 2 மதிப்புகளை மட்டுமே கொள்ளும் என்க.

$$f(x)=\begin{cases}\frac{x^2+1}{k}, & x=0\ 1,2\\ 0, & x \text{ - இன் பிற மதிப்புகளுக்கு}\end{cases}$$

என வரையறுக்கப்பட்ட நிகழ்தகவு நிறை சார்பிற்கு
(i) k -இன் மதிப்பு (ii) குவிவு பரவல் சார்பு
(iii) $P(X \geq 1)$ ஆகியவற்றைக் காண்க.
[பிடிஏ - 1; அ.மா.வி - 2019]

தீர்வு : கொடுக்கப்பட்ட

$$f(x)=\begin{cases}\frac{x^2+1}{k}, & x=0,1,2\\ 0, & \text{இன் பிற மதிப்புகளுக்கு}\end{cases}$$

சமவாய்ப்பு மாறி X எடுத்துக் கொள்ளும் மதிப்புகள் 0, 1, 2.
ஆதலால் $f(x)$ நிகழ்தகவு நிறைச் சார்பு.

(i) $\sum_{i=0}^{2} f(x_i) = 1 \Rightarrow f(0)+f(1)+f(2)=1$

$$\Rightarrow \frac{0+1}{k}+\frac{1+1}{k}+\frac{4+1}{k} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{k}+\frac{2}{k}+\frac{5}{k} = 1 \Rightarrow \frac{8}{k}=1$$

$$\Rightarrow k = 8$$

$$\because f(x) = \frac{x^2+1}{k}$$

நிகழ்தகவு நிறைச் சார்பு

x	0	1	2	மொத்தம்
$f(x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{5}{8}$	1

(ii) $F(0) = \frac{1}{8}$

$F(1) = \frac{1}{8}+\frac{2}{8} = \frac{3}{8}$

$F(2) = \frac{1}{8}+\frac{2}{8}+\frac{5}{8} = \frac{8}{8} = 1$

குவிவு பரவல் சார்பு

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{8}, & x\le 0\\ \frac{2}{8}+\frac{1}{8}, \frac{3}{8}, & x\le 1\\ \frac{3}{8}+\frac{5}{8}=1, & x\le 2\end{cases}$$

(iii) $p(x\geq 1) = p(x=1)+p(x=2) = \frac{2}{8}+\frac{5}{8}$

$p(x \geq 1) = \frac{7}{8}$

5. $$F(x)=\begin{cases}0 & -\infty<x<-1\\ 0.15 & -1\le x<0\\ 0.35 & 0\le x<1\\ 0.60 & 1\le x<2\\ 0.85 & 2\le x<3\\ 1 & 3\le x<\infty\end{cases}$$

எனக் கொடுக்கப்பட்ட ஒரு தனிநிலை சமவாய்ப்பு மாறியின் குவிவு சார்பிற்கு (i) நிகழ்தகவு நிறை சார்பு (ii) $P(X < 1)$ மற்றும் (iii) $P(X \geq 2)$ காண்க. [பிடிஏ - 3]

தீர்வு : கொடுக்கப்பட்ட $$F(x)=\begin{cases}0 & -\infty<x<-1\\ 0.15 & -1\le x<0\\ 0.35 & 0\le x<1\\ 0.60 & 1\le x<2\\ 0.85 & 2\le x<3\\ 1 & 3\le x<\infty\end{cases}$$

சமவாய்ப்பு மாறி X எடுத்துக்கொள்ளும் மதிப்புகள் –1, 0, 1, 2, 3
X என்ற தனிநிலை சமவாய்ப்பு மாறியிலிருந்து
$f(x) = p(X = x)$

$\therefore f(-1) = p(X=-1) = F(-1) - F(0)$
$= 0.15 - 0 = 0.15$

$f(0) = p(X=0) = F(0) - F(-1)$
$= 0.35 - 0.15 = 0.20$

$f(1) = p(X=1) = F(1) - F(0)$
$= 0.60 - 0.35 = 0.25$

$f(2) = p(X=2) = F(2) - F(1)$
$= 0.85 - 0.60 = 0.25$

$f(3) = p(X=3) = F(3) - F(2)$
$= 1 - 0.85 = 0.15$

www.surabooks.com

This is Only for Sample for Full Book Order Online or Available at All Leading Bookstores

(i) ∴ நிகழ்தகவு நிறைச் சார்பு

x	–1	0	1	2	3
$f(x)$	0.15	0.20	0.25	0.25	0.15

(ii) $p(X < 1)$

$= p(X = -1) + p(X = 0) = 0.15 + 0.20 = 0.35$

(iii) $p(X \geq 2)$

$= p(X = 2) + p(X = 3) = 0.25 + 0.15 = 0.40$

6. ஒரு சமவாய்ப்பு மாறி X-க்கு நிகழ்தகவு நிறைசார்பானது.

x	1	2	3	4	5
$f(x)$	k^2	$2k^2$	$3k^2$	$2k$	$3k$

எனில் (i) k மதிப்பு (ii) $P(2 \leq X < 5)$

(iii) $P(3 < X)$ ஆகியவற்றைக் காண்க.

[ஆகஸ்ட் - 2021]

தீர்வு : கொடுக்கப்பட்ட நிகழ்தகவு நிறைச் சார்பு

x	1	2	3	4	5
$f(x)$	k^2	$2k^2$	$3k^2$	$2k$	$3k$

(i) $f(x)$ நிகழ்தகவு நிறைச் சார்பு ஆதலால்

$$\sum_{i=1}^{5} f(x_i) = 1$$

$\Rightarrow k^2 + 2k^2 + 3k^2 + 2k + 3k = 1$

$\Rightarrow 6k^2 + 5k = 1$

$\Rightarrow 6k^2 + 5k - 1 = 0$

$\Rightarrow (k + 1)(6k - 1) = 0$

$\Rightarrow k = -1$ அல்லது $k = \frac{1}{6}$

[$\because k = -1$ என்பது சாத்தியமில்லை]

$\Rightarrow k = \frac{1}{6}$

(ii) $p(2 \leq x < 5)$

$= p(x = 2) + p(x = 3) + p(x = 4)$

$= 2k^2 + 3k^2 + 2k = 5k^2 + 2k$

$= 5\left(\frac{1}{36}\right) + 2\left(\frac{1}{6}\right)$

$= \frac{5}{36} + \frac{1}{3} = \frac{5+12}{36} = \frac{17}{36}$

(iii) $p(3 < x) = p(x > 3)$

$= p(x = 4) + p(x = 5)$

$= 2k + 3k = 5k$

$= 5\left(\frac{1}{6}\right) = \frac{5}{6}$

7. $$F(x) = \begin{cases} 0, & -\infty < x < 0 \\ \frac{1}{2}, & 0 \leq x < 1 \\ \frac{3}{5}, & 1 \leq x < 2 \\ \frac{4}{5}, & 2 \leq x < 3 \\ \frac{9}{10}, & 3 \leq x < 4 \\ 1, & 4 \leq x < \infty \end{cases}$$

என்பது ஒரு தனிநிலை சமவாய்ப்பு மாறியின் குவிவு பரவல் சார்பு எனில்

(i) நிகழ்தகவு நிறை சார்பு

(ii) $P(X < 3)$ மற்றும் (iii) $P(X \geq 2)$ ஆகியவற்றைக் காண்க.

தீர்வு :

கொடுக்கப்பட்ட $$f(x) = \begin{cases} 0, & -\infty < x < 0 \\ \frac{1}{2}, & 0 \leq x < 1 \\ \frac{3}{5}, & 1 \leq x < 2 \\ \frac{4}{5}, & 2 \leq x < 3 \\ \frac{9}{10}, & 3 \leq x < 4 \\ 1, & 4 \leq x < \infty \end{cases}$$

(i) சமவாய்ப்பு மாறி X எடுத்துக் கொள்ளும் மதிப்புகள் 0, 1, 2, 3, 4.

தனிநிலை சமவாய்ப்பு மாறிக்கு நம்மிடம் $f(x) = p(X = x)$

$\therefore f(0) = F(0) = \frac{1}{2}$

$f(1) = F(1) - F(0)$

$= \frac{3}{5} - \frac{1}{2} = \frac{6-5}{10} = \frac{1}{10}$

$f(2) = F(2) - F(1) = \frac{4}{5} - \frac{3}{5} = \frac{1}{5}$

$f(3) = F(3) - F(2)$

$= \frac{9}{10} - \frac{4}{5} = \frac{9-8}{10} = \frac{1}{10}$

$f(4) = F(4) - F(3) = 1 - \frac{9}{10} = \frac{1}{10}$

This is Only for Sample for Full Book Order Online or Available at All Leading Bookstores

∴ நிகழ்தகவு நிறைச் சார்பு

X	0	1	2	3	4
$p(X = x)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$

(ii) $p(x < 3) = p(x = 0) + p(x = 1) + p(x = 2)$

$$= \frac{1}{2}+\frac{1}{10}+\frac{1}{5} = \frac{5+1+2}{10} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$$

(iii) $p(x \geq 2) = p(x = 2) + p(x = 3) + p(x = 4)$

$$= \frac{1}{5}+\frac{1}{10}+\frac{1}{10} = \frac{2+1+1}{10} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$$

பயிற்சி 11.3

1. சமவாய்ப்பு மாறி X -யின் நிகழ்தகவு அடர்த்தி சார்பு $f(x) = \begin{cases} kxe^{-2x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$ எனில் k -ன் மதிப்பைக் காண்க. [ஆகஸ்ட் - 2021]

தீர்வு : கொடுக்கப்பட்ட $f(x) = \begin{cases} kxe^{-2x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$

கொடுக்கப்பட்ட சார்பு நிகழ்தகவு அடர்த்தி சார்பு ஆதலால் $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$

$$\Rightarrow \quad k\int_0^{\infty} xe^{-2x}dx = 1 \quad \Rightarrow k\cdot\frac{1!}{(2)^2} = 1$$

$$\left[\int_0^{\infty} x^n e^{-ax} = \frac{n!}{a^{n+1}}, \text{ இங்கு } a = 2, n = 1\right]$$

$$\Rightarrow \quad \frac{k}{4} = 1 \Rightarrow k = 4$$

2. சமவாய்ப்பு மாறி X-யின் நிகழ்தகவு அடர்த்தி சார்பு $f(x) = \begin{cases} x & 0 < x < 1 \\ 2-x & 1 \leq x < 2 \\ 0 & \text{பிற மதிப்புகளுக்கு} \end{cases}$

(i) $P(0.2 \leq X < 0.6)$

(ii) $P(1.2 \leq X < 1.8)$

(iii) $P(0.5 \leq X < 1.5)$ ஆகியவற்றைக் காண்க.

தீர்வு : கொடுக்கப்பட்ட $f(x) = \begin{cases} x, & 0 < x < 1 \\ 2-x, & 1 \leq x < 2 \\ 0, & \text{பிற மதிப்புகளுக்கு} \end{cases}$

(i) $P(0.2 \leq X < 0.6)$

$$= \int_{0.2}^{0.6} f(x)dx = \int_{0.2}^{0.6} x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_{0.2}^{0.6}$$

$$= \frac{1}{2}[(0.6)^2 - (0.2)^2] = \frac{1}{2}[0.36 - 0.04]$$

$$= \frac{1}{2}[0.32] = 0.16$$

(ii) $P(1.2 \leq X < 1.8)$

$$= \int_{1.2}^{1.8} f(x)dx = \int_{1.2}^{1.8}(2-x)dx$$

$$[\because 2-x, 1 \leq x < 2]$$

$$= \left[2x - \frac{x^2}{2}\right]_{1.2}^{1.8} = \left[2(1.8) - \frac{(1.8)^2}{2}\right] - \left[2(1.2) - \frac{(1.2)^2}{2}\right]$$

$$= 3.6 - \frac{3.24}{2} - 2.4 + \frac{1.44}{2}$$

$$= 3.6 - 1.62 - 2.4 + 0.72 = 0.3$$

(iii) $P(0.5 \leq X < 1.5)$

$$= \int_{0.5}^{1.5} f(x)dx = \int_{0.5}^{1} f(x)dx + \int_{1}^{1.5} f(x)dx$$

$$= \int_{0.5}^{1} x\,dx + \int_{1}^{1.5}(2-x)\,dx$$

$$= \left[\frac{x^2}{2}\right]_{0.5}^{1} + \left[2x - \frac{x^2}{2}\right]_{1}^{1.5}$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{(0.5)^2}{2} + \left[2(1.5) - \frac{(1.5)^2}{2}\right] - \left(2 - \frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{0.25}{2} + 3 - \frac{2.25}{2} - \frac{3}{2}$$

$$= \frac{1-0.25+6-2.25-3}{2} = \frac{1.5}{2} = 0.75.$$

3. ஒரு பால் விற்பனையகத்தில் வினியோகிக்கப் படும் பாலின் அளவு சமவாய்ப்பு மாறி X என்க. குறைந்தபட்சம் 200 லிட்டர்கள் மற்றும் அதிகபட்சம் 600 லிட்டர்களுடன் நிகழ்தகவு அடர்த்தி சார்பு

$$f(x) = \begin{cases} k & 200 \leq x \leq 600 \\ 0 & \text{பிற மதிப்புகளுக்கு} \end{cases}$$

(i) k மதிப்பு காண்க.

(ii) பரவல் சார்பு காண்க.

(iii) 300 லிட்டர்கள் மற்றும் 500 லிட்டர்களுக்கிடையே தினசரி விற்பனை இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு காண்க?

www.surabooks.com

orders@surabooks.com PH:9600175757 / 8124301000

This is Only for Sample for Full Book Order Online or Available at All Leading Bookstores

தீர்வு : கொடுக்கப்பட்ட $f(x) = \begin{cases} k & 200 \le x \le 600 \\ 0 & \text{பிற மதிப்புகளுக்கு} \end{cases}$

(i) $f(x)$ ஆனது நிகழ்தகவு அடர்த்தி சார்பு ஆதலால்

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1 \Rightarrow \int_{200}^{600} k\,dx = 1$$

$$\Rightarrow k[x]_{200}^{600} = 1 \Rightarrow k(600-200) = 1$$

$$\Rightarrow 400k = 1$$

$$\Rightarrow k = \frac{1}{400}$$

(ii) பரவல் சார்பு $F(x) = p(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx$

$x < 200$ எனில், $F(x) = \int_{-\infty}^{200} f(x)dx = \int_{-\infty}^{200} 0\,dx = 0$

$200 \le x \le 600$ எனில்,

$$F(x) = \int_{-\infty}^{200} f(x)dx + \int_{200}^{x} f(x)dx$$

$$= \int_{-\infty}^{200} 0\,dx + \int_{200}^{x} k\,dx = 0 + [kx]_{200}^{x}$$

$$= kx - k(200) = \frac{x}{400} - \frac{200}{400} = \frac{x}{400} - \frac{1}{2}$$

$x > 600$ எனில், $F(x) = \int_{\infty}^{200} 0\,dx + \int_{200}^{600} \frac{1}{400}dx + \int_{600}^{x} 0\,dx$

$$= \int_{200}^{600} \frac{1}{400}dx = 1$$

$\therefore$ பரவல் சார்பு $f(x) = \begin{cases} 0, & x < 200 \\ \frac{x}{400} - \frac{1}{2}, & 200 \le x \le 600 \\ 1, & x > 600 \end{cases}$

(iii) $P(300 < X < 500) = \int_{300}^{500} f(x)dx$

$$= \int_{300}^{500} k\,dx = \frac{1}{400}[x]_{300}^{500}$$

$$= \frac{1}{400}[500-300] = \frac{200}{400} = \frac{1}{2}$$

4. சமவாய்ப்பு மாறி X-யின் நிகழ்தகவு அடர்த்தி சார்பு $f(x) = \begin{cases} ke^{\frac{-x}{3}}, & x > 0 \text{ எனில்} \\ 0, & x \le 0 \end{cases}$

(i) k மதிப்பு [பிடிஏ - 2]

(ii) பரவல் சார்பு

(iii) $P(X < 3)$ [பிடிஏ - 2]

(iv) $P(5 \le X)$

(v) $P(X \le 4)$ ஆகியவற்றைக் காண்க.

தீர்வு : கொடுக்கப்பட்ட $f(x) = \begin{cases} ke^{\frac{-x}{3}}, & x > 0 \text{ எனில்} \\ 0, & x \le 0 \end{cases}$

(i) $f(x)$ ஆனது நிகழ்தகவு அடர்த்தி சார்பு ஆதலால்

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$$

$$\Rightarrow \int_{0}^{\infty} k \cdot e^{\frac{-x}{3}}dx = 1 \Rightarrow k\frac{\left[e^{\frac{-x}{3}}\right]_0^{\infty}}{-\frac{1}{3}} = 1$$

$$\Rightarrow -3k[e^{-\infty} - e^0] = 1$$

$$\Rightarrow -3k[0-1] = 1 \quad [\because e^{-\infty} = 0, e^0 = 1]$$

$$\Rightarrow 3k = 1 \Rightarrow k = \frac{1}{3}$$

$$\therefore k = \frac{1}{3}$$

(ii) பரவல் சார்பு $F(x) = p(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)du$

$x < 0$ எனில்,, $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx = 0$. $x > 0$ எனில்,

$$f(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx$$

$$= \int_{-\infty}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{x} f(x)dx$$

$$= 0 + k\int_{0}^{x} e^{\frac{-x}{3}}dx$$

$$= \frac{1}{3}\cdot\left[\frac{e^{\frac{-x}{3}}}{-\frac{1}{3}}\right]_0^x = -[e^{-\frac{x}{3}} - e^0]$$

$$= -[e^{-\frac{x}{3}} - 1] = 1 - e^{-\frac{x}{3}}$$

$$\therefore F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ 1 - e^{\frac{-x}{3}}, & x > 0 \end{cases}$$

(iii) $p(X < 3)$

$$= \int_{0}^{3} ke^{-\frac{x}{3}}dx = \frac{1}{3}\int_{0}^{3} e^{-\frac{x}{3}}dx = \frac{1}{3}\left[\frac{e^{-\frac{x}{3}}}{\frac{-1}{3}}\right]_0^3$$

$$= -[e^{-1} - e^0] = -[e^{-1} - 1]$$

$$= 1 - e^{-1}$$

orders@surabooks.com PH:9600175757 / 8124301000

This is Only for Sample for Full Book Order Online or Available at All Leading Bookstores

(iv) $p(5 \le X) = p(X \ge 5) = \int_5^{\infty} f(x)dx$

$$= \int_5^{\infty} k e^{-\frac{x}{3}} dx = \frac{1}{3} \frac{[e^{-\frac{x}{3}}]_5^{\infty}}{\frac{-1}{3}}$$

$$= -[e^{-\infty} - e^{\frac{-5}{3}}] = -[0 - e^{\frac{-5}{3}}]$$

$$= e^{\frac{-5}{3}}$$

(v) $p(X \le 4) = \int_{-\infty}^{4} f(x)dx$

$$= \int_{-\infty}^{0} f(x)dx + \int_0^4 f(x)dx$$

$$= 0 + \int_0^4 k e^{-\frac{x}{3}} dx = k\left[\frac{e^{-\frac{x}{3}}}{-\frac{1}{3}}\right]_0^4$$

$$= \frac{1}{3} \frac{[e^{-\frac{x}{3}}]_0^4}{-\frac{1}{3}} = -[e^{\frac{-4}{3}} - e^0]$$

$$= -[e^{\frac{-4}{3}} - 1] = 1 - e^{\frac{-4}{3}}$$

5. சமவாய்ப்பு மாறி X-யின் நிகழ்தகவு அடர்த்தி சார்பு,

$$f(x) = \begin{cases} x+1, & -1 \le x < 0 \\ -x+1, & 0 \le x < 1 \text{ எனில்} \\ 0 & \text{பிற மதிப்புகளுக்கு} \end{cases}$$

(i) **பரவல் சார்பு F(x)**

(ii) **P(−0.5 ≤ X ≤ 0.5) காண்க.**

தீர்வு : கொடுக்கப்பட்ட $f(x) = \begin{cases} x+1, & -1 \le x < 0 \\ -x+1, & 0 \le x < 1 \\ 0 & \text{பிற மதிப்புகளுக்கு} \end{cases}$

(i) பரவல் சார்பு

வரையறைப்படி பரவல் சார்பு

$$F(x) = P(x \le x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx$$

$x \le -1$ எனில் $F(x) = P[x \le x]$

$$= \int_{-\infty}^{x} f(x)dx = \int_{-\infty}^{x} 0dx$$

$-1 \le x < 0$ எனில் $F(x) = \int_{-\infty}^{-1} f(x)dx + \int_{-1}^{x} f(x)\, dx$

$$= 0 + \int_{-1}^{x} (x+1)\, dx = \left[\frac{x^2}{2} + x\right]_{-1}^{x}$$

$$= \left(\frac{x^2}{2} + x\right) - \left(\frac{1}{2} - 1\right)$$

$$= \frac{x^2}{2} + x + \frac{1}{2}$$

$0 \le x < 1$ எனில் $F(x) = \int_{-\infty}^{-1} f(x)dx + \int_{-1}^{0} f(x)\, dx + \int_0^x f(x)dx$

$$= 0 + \int_{-1}^{0} (x+1)\, dx + \int_0^x (-x+1)dx$$

$$= \left[\frac{x^2}{2} + x\right]_{-1}^{0} + \left[\frac{-x^2}{2} + x\right]_0^x$$

$$= -\frac{x^2}{2} + x + \frac{1}{2}$$

$x \ge 1$ எனில் $F(x) = \int_{-\infty}^{-1} f(x)dx + \int_{-1}^{0} f(x)dx + \int_0^1 f(x)dx + \int_1^{\infty} f(x)dx$

$$= 0 + \int_{-1}^{0} (x+1)\, dx + \int_0^1 (-x+1)dx$$

$$= \left[\frac{x^2}{2} + x\right]_{-1}^{0} + \left[\frac{-x^2}{2} + x\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

எனவே பரவல் சார்பு

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le -1 \\ \frac{x^2}{2} + x + \frac{1}{2} & -1 \le x < 0 \\ \frac{-x^2}{2} + x + \frac{1}{2} & 0 \le x < 1 \\ 1 & x \ge 1 \end{cases}$$

(ii) $p(-0.5 \le X \le 0.5)$

$$= \int_{-0.5}^{0.5} f(x)dx = \int_{-0.5}^{0} f(x)dx + \int_0^{0.5} f(x)dx$$

This is Only for Sample for Full Book Order Online or Available at All Leading Bookstores

$$= \int_{-0.5}^{0} (x+1)dx + \int_{0}^{0.5} (-x+1)dx$$

$$= \left[\frac{x^2}{2} + x\right]_{-0.5}^{0} + \left[\frac{-x^2}{2} + x\right]_{0}^{0.5}$$

$$= 0 - \left(\frac{0.5^2}{2} - 0.5\right) + \left(-\frac{(0.5)^2}{2} + 0.5\right) - 0$$

$$= -\left(\frac{0.25}{2} - 0.5\right) + \left(\frac{-0.25}{2} + 0.5\right)$$

$$= -\frac{0.25}{2} + 0.5 - \frac{0.25}{2} + 0.5 = -0.25 + 1 = 0.75$$

6. சமவாய்ப்பு மாறி X -யின் பரவல் சார்ப்பு F(x)

$$F(x) = \begin{cases} 0, & -\infty < x < 0 \\ \frac{1}{2}(x^2 + x) & 0 \le x < 1 \text{ எனில்} \\ 1, & 1 \le x < \infty \end{cases}$$

(i) நிகழ்தகவு அடர்த்தி சார்பு $f(x)$

[பிடிஏ - 4;ஆகஸ்ட் - 2021]

(ii) $P(0.3 \le X \le 0.6)$ ஆகியவற்றைக் காண்க.

தீர்வு : கொடுக்கப்பட்ட $F(x) = \begin{cases} 0, & -\infty < x < 0 \\ \frac{1}{2}(x^2 + x) & 0 \le x < 1 \\ 1, & 1 \le x < \infty \end{cases}$

(i) நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு
$F(x)$-இன் தொடர்ச்சியுடைய புள்ளிகளில் 'x'ஐ பொறுத்து $F(x)$ஐ வகையிட கிடைப்பது,

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} 0. & x < 0 \\ \frac{1}{2}(2x+1), & 0 \le x < 1 \\ 0, & 1 \le x \end{cases}$$

(ii) $p(0.3 \le X \le 0.6) = \int_{0.3}^{0.6} f(x)dx$

$$= \int_{0.3}^{0.6} \frac{1}{2}(2x+1)dx = \frac{1}{2}\left[\frac{2x^2}{2} + x\right]_{0.3}^{0.6}$$

$$= \frac{1}{2}(x^2 + x)_{0.3}^{0.6} = \frac{1}{2}[(0.6^2 + 0.6) - (0.3^2 + 0.3)]$$

$$= \frac{1}{2}[(.36 + .6) - (.09 + 0.3)]$$

$$= \frac{1}{2}[0.96 - 0.39] = \frac{0.57}{2} = 0.285$$

பயிற்சி 11.4

1. கீழ்க்காணும் ஒரு சமவாய்ப்பு மாறி X-ன் நிகழ்தகவு நிறை சார்புகளுக்கு சராசரி மற்றும் பரவற்படி காண்க.

(i) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{10} & x = 2,5 \\ \frac{1}{5} & x = 0,1,3,4 \end{cases}$

(ii) $f(x) = \begin{cases} \frac{4-x}{6} & x = 1, 2, 3 \end{cases}$

(iii) $f(x) = \begin{cases} 2(x-1) & 1 < x << 2 \\ 0 & \text{பிற மதிப்புகளுக்கு} \end{cases}$

[பிடிஏ - 5]

(iv) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}, & x > 0 \\ 0, & \text{பிற மதிப்புகளுக்கு} \end{cases}$

தீர்வு :(i) கொடுக்கப்பட்ட $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{10}, x = 2,5 \\ \frac{1}{5}, \ x = 0,1,3,4 \end{cases}$

x	0	1	2	3	4	5
$f(x)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$

$\therefore$ சராசரி $= E(x) = \Sigma x f(x) = 0\left(\frac{1}{5}\right) + 1\left(\frac{1}{5}\right) + 2\left(\frac{1}{10}\right) + 3\left(\frac{1}{5}\right) + 4\left(\frac{1}{5}\right) + 5\left(\frac{1}{10}\right)$

$$= \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{3}{5} + \frac{4}{5} + \frac{1}{2} = \frac{2+2+6+8+5}{10} = \frac{23}{10} = 2.3$$

$f(x^2) = \Sigma x^2 f(x)$

$$= 0^2\left(\frac{1}{5}\right) + 1^2\left(\frac{1}{5}\right) + 2^2\left(\frac{1}{10}\right) + 3^2\left(\frac{1}{5}\right) + 4^2\left(\frac{1}{5}\right) + 5^2\left(\frac{1}{10}\right)$$

$$= 0 + \frac{1}{5} + \frac{4}{10} + \frac{9}{5} + \frac{16}{5} + \frac{25}{10}$$

$$= \frac{2+4+18+32+25}{10} = \frac{81}{10} = 8.1$$

பரவற்படி $= E(X^2) - [E(X)]^2$
$= 8.1 - (2.3)^2 = 8.1 - 5.29 = 2.81$

orders@surabooks.com PH:9600175757 / 8124301000

This is Only for Sample for Full Book Order Online or Available at All Leading Bookstores

(ii) கொடுக்கப்பட்ட $f(x) = \frac{4-x}{6}$, $x = 1, 2, 3$

$$f(x) = \frac{4-1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$f(2) = \frac{4-2}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$f(3) = \frac{4-3}{6} = \frac{1}{6}$$

∴ நிகழ்தகவு நிறைச் சார்பு

x	1	2	3
$f(x)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

சராசரி $= E(X) = \Sigma x f(x)$

$$= 1\left(\frac{1}{2}\right) + 2\left(\frac{1}{3}\right) + 3\left(\frac{1}{6}\right)$$

$$= \frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{6} = \frac{3+4+3}{6}$$

$$= \frac{10}{6} = \frac{5}{3} = 1.67$$

$$E(x^2) = \Sigma x^2 f(x) = 1^2\left(\frac{1}{2}\right) + 2^2\left(\frac{1}{3}\right) + 3^2\left(\frac{1}{6}\right)$$

$$= \frac{1}{2}+\frac{4}{3}+\frac{9}{6} = \frac{3+8+9}{6} = \frac{20}{6} = \frac{10}{3}$$

$$\text{var}(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

$$= \frac{10}{3} - \left(\frac{5}{3}\right)^2 = \frac{10}{3} - \frac{25}{9}$$

$$= \frac{30-25}{9} = \frac{5}{9} = 0.56$$

(iii) $f(x) = \begin{cases} 2(x-1), & 1 < x << 2 \\ 0, & \text{பிற மதிப்புகளுக்கு} \end{cases}$

சராசரி $= E(X) = \int_1^2 f(x)dx = \int_1^2 2(x-1)dx$

$$= \left[\frac{2x^2}{3} - x^2\right]_1^2 = \frac{16}{3} - 4 - \frac{2}{3} + 1 = \frac{5}{3}$$

$$E(x^2) = \int_1^2 x^2 f(x)dx$$

$$= \int_1^2 2x^2(x-1)dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3}\right]_1^2$$

$$= 8 - \frac{16}{3} - \frac{1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{17}{6}$$

$$\therefore \text{Var}(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

$$= \frac{17}{6} - \frac{25}{9} = \frac{51-50}{18} = \frac{1}{18}$$

(iv) கொடுக்கப்பட்ட $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}, & x > 0 \\ 0, & \text{பிற மதிப்புகளுக்கு} \end{cases}$

$$\int_0^\infty x \cdot f(x)dx = \frac{1}{2}\int_0^\infty x \cdot e^{\frac{-x}{2}}dx$$

$$\left[\int_0^\infty e^{-ax} \cdot x^n dx = \frac{n!}{a^{n+1}}\right] = \frac{1}{2} \times \frac{1!}{\left(\frac{-1}{2}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2} \times \frac{4}{1} = 2$$

$$E(X^2) = \int_0^\infty x^2 \cdot f(x)dx = \int_0^\infty x^2 \cdot \frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}dx$$

$$= \frac{1}{2}\int x^2 \cdot e^{-\frac{x}{2}}dx = \frac{1}{2} \times \frac{2!}{\left(\frac{1}{2}\right)^3}$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{2}{\frac{1}{8}} = \frac{1}{2} \times 2 \times 8 = 8$$

$$\therefore \text{Var}(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

$$= 8 - 2^2 = 8 - 4 = 4$$

2. நான்கு சிவப்பு பந்துகள் மற்றும் மூன்று கருப்பு பந்துகள் கொண்ட ஒரு கூடையிலிருந்து பதிலீடாக இடாது அடுத்தடுத்து இரு பந்துகள் வெளியில் எடுக்கப்படுகின்றன. சிவப்பு பந்து வெளியில் எடுக்கும் சாத்திய கூறுகளை X என்க. X-ன் நிகழ்தகவு நிறை சார்பையும் சராசரியையும் காண்க.

தீர்வு : கூறுவெளி = {4R, 3B}

X எடுக்கப்பட்ட சிவப்பு பந்துகளின் எண்ணிக்கை

X எடுத்துக் கொள்ளும் மதிப்புகள் 0, 1, 2

P(X = 0) = P(சிவப்பு பந்து இல்லை)

$$= \frac{3C_2}{7C_2} = \frac{\frac{3\times2}{2\times1}}{\frac{7\times6}{2\times1}} = \frac{1}{7}$$

P(X = 1) = P(1 சிவப்பு பந்து)

$$= \frac{3C_1 \times 4C_1}{7C_2} = \frac{12}{\frac{7\times6}{2\times1}} = \frac{12}{21} = \frac{4}{7}$$

www.surabooks.com

This is Only for Sample for Full Book Order Online or Available at All Leading Bookstores

$$P(X = 2) = P(2 \text{ சிவப்பு பந்து}) = \frac{4C_2}{7C_2} = \frac{\frac{4\times3}{2\times1}}{\frac{7\times6}{2\times1}} = \frac{12}{7\times6} = \frac{2}{7}$$

∴ நிகழ்தகவு நிறைச் சார்பு

x	0	1	2
$f(x)$	$\frac{1}{7}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{2}{7}$

$$E(X) = \sum x \, . \, f(x) = 0\left(\frac{1}{7}\right) + 1\left(\frac{4}{7}\right) + 2\left(\frac{2}{7}\right) = \frac{4}{7}+\frac{4}{7} = \frac{8}{7}$$

3. μ மற்றும் σ^2 ஆகியவை முறையே தனிநிலை சமவாய்ப்பு மாறி X-ன் சராசரி மற்றும் பரவற்படி மற்றும் $E(X + 3)=10$ மற்றும் $E(X + 3)^2 = 116$, எனில் μ மற்றும் σ^2 காண்க. [பிடிஏ - 1]

தீர்வு : கொடுக்கப்பட்ட $E(X + 3) = 10$

$\Rightarrow \quad E(X) + 3 = 10 \quad \Rightarrow E(X) = 7$

$\Rightarrow \quad \mu = 7$ ...(1)

$E(X + 3)^2 = 116$

$E(X^2 + 6X + 9) = 116$

$E(X^2) + 6E(X) + 9 = 116$ $[\because E(9) = 9]$

$E(X^2) + 6(7) + 9 = 116$

$E(X^2) = 116 - 42 - 9 = 116 - 51$

$E(X^2) = 65$ ...(2)

$Var(X) = E(X^2) - E(X)^2$

$= 65 - 7^2 = 65 - 49 = 16$

$\therefore \mu = 7$ மற்றும் $\sigma^2 = 16$.

4. நான்கு சீரான நாணயங்கள் ஒரு முறை சுண்டப்படுகின்றன. தலைகளின் எண்ணிக்கை நிகழ்விற்கு நிகழ்தகவு நிறை சார்பு, சராசரி, மற்றும் பரவற்படி காண்க.

தீர்வு : X என்பது தலைகளின் எண்ணிக்கையை குறிக்கிறது.

X எடுத்துக் கொள்ளும் மதிப்புகள் 0, 1, 2, 3, 4.

$$p(X = 0) = p(\text{தலை இல்லை}) = p(TTTT) = \frac{1}{16}$$

$$\left[\therefore p(T) = \frac{1}{2}, p(H) = \frac{1}{2}\right]$$

$$p(X = 1) = p(1 \text{ தலை}) = 4C_1 \times \frac{1}{16} = \frac{1}{4}$$

$$p(X=2) = p(2 \text{ தலைகள்}) = 4C_2 \times \frac{1}{16} = \frac{\cancel{4}^2 \times 3}{\cancel{2}\times 1} \times \frac{1}{\cancel{16}_8} = \frac{3}{8}$$

$$p(X = 3) = p(3 \text{ தலைகள்}) = 4C_3 \times \frac{1}{16} = 4\times\frac{1}{16} = \frac{1}{4}$$

$$p(X = 4) = p(4 \text{ தலைகள்}) = 4C_4 \times \frac{1}{16} = \frac{1}{16}$$

∴ நிகழ்தகவு நிறைச் சார்பு

x	0	1	2	3	4
$f(x)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$

∴ சராசரி $= E(X) = \Sigma x f(x)$

$$= 0\left(\frac{1}{16}\right) + 1\left(\frac{1}{4}\right) + 2\left(\frac{3}{8}\right) + 3\left(\frac{1}{4}\right) + 4\left(\frac{1}{16}\right)$$

$$= \frac{1}{4}+\frac{3}{4}+\frac{3}{4}+\frac{1}{4} = \frac{8}{4} = 2$$

$$E(X^2) = \Sigma x^2 f(x)$$

$$= 0^2\left(\frac{1}{16}\right) + 1^2\left(\frac{1}{4}\right) + 2^2\left(\frac{3}{8}\right) + 3^2\left(\frac{1}{4}\right) + 4^2\left(\frac{1}{16}\right)$$

$$= \frac{1}{4}+\frac{3}{2}+\frac{9}{4}+1 = \frac{1+6+9+4}{4} = \frac{20}{4} = 5$$

$\therefore Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$

$= 5 - 2^2 = 5 - 4 = 1$

5. ஒரு பயணிகள் இரயில் ஒவ்வொரு அரை மணி நேரத்திற்கும் ஒரு நிலையத்திற்கு சரியான நேரத்தில் வந்து சேரும். ஒவ்வொரு நாள் காலையிலும், ஒரு மாணவர் தனது வீட்டிலிருந்து இரயில் நிலையத்திற்கு செல்கிறார். மாணவர் ரயில் நிலையத்தை அடையும் நேரத்திலிருந்து ரயிலுக்காக காத்திருக்கும் நேரத்தை X என நிமிடங்களில் குறிக்கலாம். X -ன் நிகழ்தகவு அடர்த்தி சார்பு

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{30} & 0 < x < 30 \\ 0 & \text{பிற மதிப்புகளுக்கு} \end{cases}$$

எனில் சமவாய்ப்பு மாறி X-ன் எதிர்பார்ப்பு மதிப்பை கணித்து விளக்குக.

தீர்வு : கொடுக்கப்பட்ட

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{30} & 0 < x < 30 \\ 0 & \text{பிற மதிப்புகளுக்கு} \end{cases}$$

$$\text{சராசரி} = E(X) = \int_0^{30} x \cdot f(x)dx = \int_0^{30} x \cdot \frac{1}{30}dx$$

$$E(X) = \frac{1}{30}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{30} = \frac{1}{60}[30^2 - 0^2] = \frac{1}{60}(900)$$

E(X)= 15 நிமிடங்கள்

This is Only for Sample for Full Book Order Online or Available at All Leading Bookstores

அத்தியாயம்
12

தனிநிலைக் கணிதம்

முக்கிய வரையறைகள்

- $*$ என்ற ஈருறுப்புச் செயலை S -இன் மீது பின்வருமாறும் வரையறுக்கலாம்: $\forall\ a, b \in S, a * b$, என்பது ஒருமைத்தன்மை வாய்ந்தது, மேலும் $a * b \in S$.
- ஒன்று அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட ஈருறுப்புச் செயல்களைப் பொருத்து ஏதேனும் ஒரு வெற்றற்ற கணத்தின் மீது வரையறுக்கப்பட்டால் அது இயற்கணித அமைப்பு எனப்படும்.
- $*: S \times S \to S$; அதாவது $*(a, b) = a * b \in S$ இங்கு $a * b$ என்பது ஓர் உறுப்பாகும். $*$–ன் விளைவு எப்பொழுதும் கண்டிப்பாக S –ஆனது . $*$–ன் கீழ் அடைவு பெற்றுள்ளது எனக் கூறலாம். இப்பண்பை அடைவுப் பண்பு என்று கூறுவர்.
- ஒரு வெற்றற்ற கணம் S –ன் மீது ஈருறுப்புச் செயலி $*$ஆனது பரிமாற்றுத் தன்மையுடையதாயின் ஒவ்வொரு $a, b \in S$ -க்கும் $a * b = b * a$ என்பது உண்மையாக வேண்டும்.
- ஒரு வெற்றற்ற கணம் S –ன் மீது ஈருறுப்புச் செயலி $*$ஆனது சேர்ப்புப் பண்பு உடையதாயின் $a * (b * c) = (a * b) * c\ \forall\ a, b \in S$ என்பது உண்மையாக வேண்டும்.
- $*$ என்ற ஈருறுப்புச் செயலியின் கீழ் $e \in S$ என்பது S –ன் சமனி உறுப்பு எனில் $\forall\ a \in S, a * e, = a$ மற்றும் $e * a = a$ என்பதை நிறைவு செய்யும்.
- S –ல் e எனும் ஒரு சமனி உறுப்பு இருந்தால் $\forall\ a \in S, \in b \in S, b * a = e$ மற்றும் $b * a = e$ எனில், $b \in S$ என்பது a –ன் நேர்மாறு உறுப்பு அல்லது எதிர்மறை உறுப்பு எனப்படும். இதை நாம் $b = a^{-1}$ என எழுதலாம்.
- A மற்றும் B–ன் இணைப்பு $A \vee B = [a_{ij}] \vee [b_{ij}] = [a_{ij} \vee b_{ij}] = [c_{ij}]$ இங்கு $c_{ij} = \begin{cases} 1 & a_{ij} = 1 \text{ அல்லது } b_{ij} = 1 \\ 0 & a_{ij} = 0 \text{ மற்றும் } b_{ij} = 0 \end{cases}$
- A மற்றும் B–ன் சந்திப்பு $A \wedge B = [a_{ij}] \wedge [b_{ij}] = [c_{ij}]$ இங்கு $c_{ij} = \begin{cases} 1 & a_{ij} = 1 \text{ மற்றும் } b_{ij} = 1 \\ 0 & a_{ij} = 1 \text{ அல்லது } b_{ij} = 1 \end{cases}$
- ***n* - ன் மட்டுக்கு கூட்டல்**
  $a, b \in \mathbb{Z}n$ என்க. பிறகு $a + b$ஐ n ஆல் வகுக்க கிடைக்கும் மீதி $a +_n b$.
- ***n* - ன் மட்டுக்கு பெருக்கல்**
  $a, b \in \mathbb{Z}n$ என்க. பிறகு $a \times b$ ஐ n ஆல் வகுக்க கிடைக்கும் மீதி $a \times_n b$
- ஒரு கூற்றை அதன் கூட்டுக் கூற்றுகளின் மெய் மதிப்பை பொருட்படுத்தாமல் “மெய்மம்” எனக் கூறவேண்டுமானால் அதன் மெய்மதிப்பு எல்லா நிலையிலும் T ஆக இருக்க வேண்டும். இதை $\mathbb{T}$ எனக் குறிப்பிடுவர்.
- ஒரு கூற்றை அதன் கூட்டுக் கூற்றுகளின் மெய் மதிப்பைப் பொருட்படுத்தாமல் “முரண்பாடு” எனக் கூற வேண்டுமானால் அதன் மெய்மதிப்பு எப்பொழுதும் F ஆக இருக்கவேண்டும். இதை $\mathbb{F}$ எனக் குறிப்பிடுவர்.
- ஒரு கூற்று வாய்பாட்டினுடைய இருமை ஆனது $\wedge, \vee$, T ஆகியவைகளுக்கு முறையே $\wedge, \vee$, F களை பதிலிடுவதன் மூலம் பெறப்படுகிறது. ஓர் இருமை ஆனது $\mathbb{T}$ (tautology / மெய்மம்) க்கு பதிலாக $\mathbb{F}$ ஐயும், (contradiction / முரண்பாடு)–க்குப் பதிலாக $\mathbb{T}$ ஐயும் பதிலிடுவதன் மூலம் பெறப்படுகிறது.

orders@surabooks.com PH:9600175757 / 8124301000

This is Only for Sample for Full Book Order Online or Available at All Leading Bookstores

நினைவில் கொள்ள வேண்டிய சூத்திரங்கள்

✦ மறுப்பின் மெய்மை அட்டவணை ~

p	$\neg p$
T	F
F	T

✦ மற்றும் AND ($\wedge$) என்பதற்குரிய இணையலின் மெய்மை அட்டவணை

p	q	$p \wedge q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

✦ அல்லது R($\vee$) என்பதற்குரிய பிரிப்பிணைவின் மெய்மை அட்டவணை

p	q	$p \vee q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

✦ $p \rightarrow q$ -ன் மெய்மை அட்டவணை (நிபந்தனைக் கூற்று)

p	q	$p \rightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

✦ $p \leftrightarrow q$-ன் மெய்மை அட்டவணை (இரு நிபந்தனைக் கூற்று)

p	q	$p \leftrightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

✦ $p \veebar q$-ன் மெய்மை அட்டவணை

p	q	$p \veebar q$
T	T	F
T	F	T
F	T	T
F	F	F

✦ A மற்றும் B என்கிற இரண்டு கூட்டுக் கூற்றுகளின் மெய்மை அட்டவணைகளின் கடைசி நிரல்கள் ஒரே மாதிரியான மெய் மதிப்புகளைப் பெற்றிருப்பின் அவை தர்க்க சமானமானவை எனப்படும். இதனை $A \equiv B$ அல்லது $A \Leftrightarrow B$ என்ற குறியீட்டால் குறிப்பிடுவர்.

✦ **சமானமானவைகளின் சில விதிகள்**

1. தன்னடக்க விதிகள்: (i) $p \vee q \equiv p$ (ii) $p \wedge q \equiv p$
2. பரிமாற்று விதிகள் : (i) $p \vee q \equiv q \vee p$ (ii) $p \wedge q \equiv q \wedge p$
3. சேர்ப்பு விதிகள் : (i) $p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r$ (ii) $p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r$
4. பங்கீட்டு விதிகள்: (i) $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ (ii) $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
5. சமனி விதிகள்: (i) $p \vee \mathbb{T} \equiv \mathbb{T}$ மற்றும் $p \vee \mathbb{F} \equiv p$ (ii) $p \wedge \mathbb{T} \equiv p$ மற்றும் $p \wedge \mathbb{F} \equiv p$
6. நிரப்பு விதிகள் : (i) $p \vee \neg p \equiv \mathbb{T}$ மற்றும் $p \wedge \neg p \equiv \mathbb{F}$ (ii) $\neg \mathbb{T} \equiv \mathbb{F}$ மற்றும் $\neg \mathbb{F} \equiv \mathbb{T}$
7. உடற்சுழற்சி விதி அல்லது இரட்டை மறுப்பு விதி $\neg(\neg p) \equiv p$
8. டீ மார்கனின் விதிகள்: (i) $\neg (p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$ (ii) $\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$
9. ஈர்ப்பு விதிகள்: (i) $p \vee (p \wedge q) \equiv p$ (ii) $p \wedge (p \vee q) \equiv p$

orders@surabooks.com PH:9600175757 / 8124301000

This is Only for Sample for Full Book Order Online or Available at All Leading Bookstores

பயிற்சி 12.1

1. கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள கணங்களின் மீது வரையறுக்கப்பட்டிருக்கும் * ஓர் ஈருறுப்புச் செயலியா எனத் தீர்மானிக்க .

(i) $\mathbb{R}$ -ன் மீது $a*b = a.|b|$

(ii) A ={1, 2, 3, 4, 5} -ன் மீது $a*b = (a, b)$ -ல் சிறியது.

(iii) $\mathbb{R}$ -ன் மீது $(a*b) = a\sqrt{b}$

தீர்வு : (i) $\mathbb{R}$ -ன் மீது $a*b = a.|b|$

கொடுக்கப்பட்ட $\mathbb{R}$ -ன் மீது $a * b = a \cdot |b|$

$a, b \in \mathbb{R}$ என்க

பிறகு $a * b = a . |b| \in \mathbb{R}$.

ஆதலால் $a \cdot |b| = ab, b > 0$ எனில்

$= -ab, b < 0$ எனில்

$\therefore a * (b) = a \cdot |b| \in \mathbb{R}$

ஆம் * ஆனது $\mathbb{R}$-ன் மீதான ஓர் ஈருறுப்புச் செயலி ஆகும்.

(ii) A ={1, 2, 3, 4, 5} -ன் மீது $a*b = (a, b)$ -ல் சிறியது.

$a, b \in$ A என்க

பிறகு (a, b) -ல் சிறியது. $= a$ அல்லது b மற்றும் $a, b \in$ A

$\therefore a * b = (a,b)$-ல் சிறியது $\in$ A

ஆம் * ஆனது $\mathbb{R}$-ன் மீதான ஓர் ஈருறுப்புச் செயலி ஆகும்.

(iii) $\mathbb{R}$ -ன் மீது $(a*b) = a\sqrt{b}$

$a, b \in \mathbb{R}$ என்க

[$\therefore$ குறை எண்களின் வர்க்க மூலம் $\mathbb{R}$-ல் இல்லை]

$a * b = a\sqrt{b} \notin \mathbb{R}, b < 0$ எனில்

எனவே* ஆனது $\mathbb{R}$-ன் மீதான ஈருறுப்புச் செயலி அல்ல.

2. $\mathbb{Z}$ -ன் மீது $\otimes$ என்ற செயலி பின்வருமாறு வரையறுக்கப்பட்டுள்ளது. $(m\otimes n)=m^n+n^m : \forall m, n \in \mathbb{Z}$. *ஆனது $\mathbb{Z}$-ன் மீது அடைவுப் பண்பை பெற்றுள்ளதா? [பிடிஏ - 3]

தீர்வு : கொடுக்கப்பட்ட $m \otimes n = m^n + n^m \ \forall\ m, n \in \mathbb{Z}$

$m, n \in \mathbb{Z}$ என்க.

$m = -3, n = 2$ எனக் கொள்க.

$\therefore m \otimes n = (-3)^2 + 2^{-3}$

$= 9 + \frac{1}{8} = \frac{72+1}{8} = \frac{73}{8} \notin \mathbb{Z}$

$\therefore \otimes$ ஆனது, $\mathbb{Z}$-ன் மீது அடைவு பெறவில்லை.

3. $\mathbb{R}$ -ன் மீது *ஆனது $(a*b) = a + b + ab - 7$ என வரையறுக்கப்பட்டால் * ; $\mathbb{R}$- ன் மீது அடைவு பெற்றுள்ளதா? அவ்வாறெனில், $3*\left(\frac{-7}{15}\right)$ காண்க. [பிடிஏ - 2]

தீர்வு : கொடுக்கப்பட்ட $a * b = a + b + ab - 7$ஆகியவை $a + b, ab, -7$ மெய்யெண்கள் மற்றும் இவற்றின் கூடுதலும் மெய்யெண்கள் ஆகும். எனவே * ஓர் ஈருறுப்புச் செயலியாகும்.

$$3 * \left(\frac{-7}{15}\right) = 3 - \frac{7}{15} + \cancel{3}^1\left(\frac{-7}{\cancel{15}_5}\right) - 7$$

[இங்கு $a = 3, b = \frac{-7}{15}$]

$$= 3 - \frac{7}{15} - \frac{21}{15} - 7$$

$$= \frac{45 - 7 - 21 - 105}{15} = \frac{-88}{15}$$

$$\therefore 3 * \left(\frac{-7}{15}\right) = \frac{-88}{15}$$

4. A = $\{a + \sqrt{5}b : a, b \in \mathbb{Z}\}$ என்க. வழக்கமான பெருக்கல் A -ன் மீது ஓர் ஈருறுப்புச் செயல் ஆகுமா என பரிசோதிக்க. [பிடிஏ - 5]

தீர்வு : கொடுக்கப்பட்ட A = $\{a + \sqrt{5}\, b, a, b \in z\}$

C = $a + \sqrt{5}\, b$ என்க

B = $c + \sqrt{5}\, d \in$ A

இங்கு $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$

$\therefore$ C.B $= (a + \sqrt{5}\, b) . (c + \sqrt{5}\, d)$

$= ac + \sqrt{5}\, ad + cb\sqrt{5} + 5\, bd$

$= (ac + 5\, bd) + \sqrt{5}\ (ad + bc) \in$ A

[$\because ac + 5\, bd \in \mathbb{Z}$ மற்றும் $ad + bc \in \mathbb{Z}$]

$\therefore$ C . B $\in$ A $\forall\ a, b, c, d, \in \mathbb{Z}$

$\therefore$ வழக்கமான பெருக்கல் A-ன் மீது ஓர் ஈருறுப்புச் செயலி ஆகும்.

5. (i) *என்ற ஓர் ஈருறுப்புச் செயலி $\mathbb{Q}$ -ன் மீது பின்வருமாறு வரையறுக்கப் படுகிறது. இந்த *ஆனது, அடைவுப் பண்பு, பரிமாற்றுப் பண்பு, சேர்ப்புப் பண்பு ஆகியவற்றை நிறைவு செய்கிறதா எனச் சோதிக்க

$a*b = \left(\frac{a+b}{2}\right); \forall a, b \in \mathbb{Q}$. [ஆகஸ்ட் - 2021]

This is Only for Sample for Full Book Order Online or Available at All Leading Bookstores

(ii) *ஆனது, சமனிப் பண்பு மற்றும் எதிர்மறைப் பண்பு ஆகியவை, $\mathbb{Q}$ -ன் மீது உண்மையாகுமா எனச் சோதிக்க.

$$a*b = \left(\frac{a+b}{2}\right);\ \forall a, b \in \mathbb{Q}.$$

தீர்வு : கொடுக்கப்பட்ட $a * b = \frac{a+b}{2}$ $\forall a, b \in \mathbb{Q}$.

(i) அடைவுப் பண்பு :

$a, b \in \mathbb{Q}$ என்க.

$$\therefore a * b = \frac{a+b}{2} \in \mathbb{Q}$$

[$\because$ கூட்டல் மற்றும் பெருக்கல் $\mathbb{Q}$-ல் அடைவுப் பண்பு பெற்றுள்ளது]

$\mathbb{Q}$-ல் *அடைவுப் பண்பு பெற்றுள்ளது.

(ii) பரிமாற்றுப் பண்பு

$a, b \in \mathbb{Q}$ என்க.

பிறகு $a * b = \frac{a+b}{2} = \frac{b+a}{2} = b * a$

$$\therefore a * b = b * a \quad \forall a, b \in \mathbb{Q}$$

$\therefore$ $\mathbb{Q}$இல் * பரிமாற்றுப் பண்புடையதாகும்.

சேர்ப்புப் பண்பு

$a, b, c \in \mathbb{Q}$ என்க

$$a * (b * c) = (a * b) * c$$

$a = 2, b = 3, c = -5$ என்க

$$\therefore a * (b * c) = 2 * (3 * -5)$$
$$= 2 * \left(\frac{3-5}{2}\right)$$
$$= 2 * (-1) = \frac{2+(-1)}{2}$$
$$= \frac{1}{2} \quad ....(1)$$

இங்கு $(a * b) * c = (2 * 3) * (-5)$

$$= \left(\frac{2+3}{2}\right) * (-5)$$
$$= \frac{5}{2} * -5 = \frac{\frac{5}{2}+(-5)}{2}$$
$$= \frac{5-10}{4} = \frac{-5}{4} \quad ...(2)$$

(1) மற்றும் (2)லிருந்து, $a * (b * c) \neq (a * b) * c$

$\therefore$ $\mathbb{Q}$ இல் * சேர்ப்புப் பண்பு இல்லை.

(ii) கொடுக்கப்பட்ட $a * b = \frac{a+b}{2}$, இங்கு $a, b \in \mathbb{Q}$

$a, b \in \mathbb{Q}$ என்க.

$a * e = e * a = a$ என்ற உறுப்பை பின்வருமாறு காண வேண்டும்.

$a = 5$ என்க, பிறகு $5 * e = 5$

$$\Rightarrow \frac{5+e}{2} = 5 \Rightarrow 5 + e = 10$$

$a = \frac{2}{3}$ என்க. பிறகு $\frac{2}{3} * e = \frac{2}{3}$

$$\Rightarrow \frac{\frac{2}{3}+e}{2} = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{2}{3} + e = \frac{4}{3} \Rightarrow e = \frac{4}{3} - \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$$

சமனி உறுப்பு ஒவ்வொரு உறுப்புக்கும் மாறுவதால், $\mathbb{Q}$-வில் சமனி உறுப்பு இல்லை

$\therefore$ * க்கு $\mathbb{Q}$ -வில் சமனி பண்பு இல்லை.

$\therefore$ * க்கு $\mathbb{Q}$ -வில் எதிர்மறை பண்பு இல்லை.

எனவே சமனி மற்றும் எதிர்மறை பண்பு ஈருறுப்பு செயலி * க்கு இல்லை.

6. * என்ற ஈருறுப்புச் செயலி ஆனது A = {a, b, c} என்ற கணத்தின் மீது பரிமாற்று விதிக்கு கட்டுப்பட்டால் பின்வரும் பட்டியலைப் பூர்த்தி செய்க.

*	a	b	c
a	b		
b	c	b	a
c	a		c

தீர்வு : A இல் கொடுக்கப்பட்ட * பரிமாற்று பண்புடையது

கொடுக்கப்பட்ட $b * a = c \Rightarrow a * b = c$

கொடுக்கப்பட்ட $c * a = a \Rightarrow a * c = a$

கொடுக்கப்பட்ட $b * c = a \Rightarrow c * b = a$

எனவே

*	a	b	c
a	b	c	a
b	c	b	a
c	a	a	c

7. A = {a, b, c, d} என்ற கணத்தின் மீது * என்ற ஈருறுப்புச் செயலியை பின்வரும் பட்டியலுடன் கருதுக.

*	a	b	c	d
a	a	c	b	d
b	d	a	b	c
c	c	d	a	a
d	d	b	a	c

இது மாற்றுப்பண்பு மற்றும் சேர்ப்புப் பண்புகளைப் பெற்றுள்ளதா?

www.surabooks.com

orders@surabooks.com PH:9600175757 / 8124301000

This is Only for Sample for Full Book Order Online or Available at All Leading Bookstores

தீர்வு : கொடுக்கப்பட்ட $A = \{a, b, c, d\}$ மற்றும் $*$ பின்வருமாறு வரையறுக்கப்படுகிறது.

*	a	b	c	d
a	a	c	b	d
b	d	a	b	c
c	c	d	a	a
d	d	b	a	c

அட்டவணையிலிருந்து

(i) $a * b = c$ மற்றும் $b * a = d$

$\Rightarrow$ A இல் $*$ பரிமாற்று பண்பை பெறவில்லை.

(ii) $a * (b * c) = (a * b) * c$ என்பதை சரிபார்க்க

$\Rightarrow a * (b) = c * c$

$\Rightarrow c \neq a$

$\therefore$ A இல் $*$ ஆனது சேர்ப்பு பண்பை நிறைவு செய்யவில்லை.

8. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$

$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ **என்பவைகள் ஒரே மாதிரியான வகையினை உடைய ஏதேனும் மூன்று பூலியன் அணிகள் எனில்,**

(i) A∨B **(ii) A∧B**

(iii) (A∨B)∧C **(iv) (A∧B)∨C**

ஆகியவைகளைக் காண்க.

தீர்வு : கொடுக்கப்பட்ட $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ மற்றும் $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

(i) $A \vee B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 1\vee 0 & 0\vee 1 & 1\vee 0 & 0\vee 1 \\ 0\vee 1 & 1\vee 0 & 0\vee 1 & 1\vee 0 \\ 1\vee 1 & 0\vee 0 & 0\vee 0 & 1\vee 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

[$\because a \vee b = (a, b)$ சிறியது]

(ii) $A \wedge B$

$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 1\wedge 0 & 0\wedge 1 & 1\wedge 0 & 0\wedge 1 \\ 0\wedge 1 & 1\wedge 0 & 0\wedge 1 & 1\wedge 0 \\ 1\wedge 1 & 0\wedge 0 & 0\wedge 0 & 1\wedge 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

[$\because a \wedge b = (a, b)$ சிறியது]

(iii) $(A \vee B) \wedge C$

(1) லிருந்து,

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(iv) $(A \wedge B) \vee C$

(ii) லிருந்து

$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$(A \wedge B) \vee C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

9. (i) $\mathbf{M} = \left\{ \begin{pmatrix} x & x \\ x & x \end{pmatrix} : x \in \mathbb{R} - \{0\} \right\}$ **என்க.**

$*$ என்பது அணிப் பெருக்கல் எனக் கொள்க. $*$ஆனது M -ன் மீது அடைவு பெற்றுள்ளதா எனத் தீர்மானிக்க. அவ்வாறெனில், $*$ ஆனது M -ன் மீது பரிமாற்றுப் பண்பு, சேர்ப்புப் பண்புகளையும் நிறைவு செய்யுமா எனச் சோதிக்க.

(ii) $\mathbf{M} = \left\{ \begin{pmatrix} x & x \\ x & x \end{pmatrix} : x \in \mathbb{R} - \{0\} \right\}$ **$*$ என்பது அணிப் பெருக்கல் எனக் கொள்க. $*$ஆனது M -ன் மீது அடைவு பெற்றுள்ளதா எனத் தீர்மானிக்க. அவ்வாறெனில், $*$ ஆனது M -ன் மீது சமனிப்பண்பு, மற்றும் எதிர்மறைப் பண்புகளை நிறைவு செய்யுமா எனவும் சோதிக்க.**

தீர்வு : அடைவுப்பண்பு :

(i) கொடுக்கப்பட்ட $M = \left\{ \begin{pmatrix} x & x \\ x & x \end{pmatrix} : x \in \mathbb{R} - \{0\} \right\}$ மற்றும் $*$ என்பது அணி பெருக்கல்

orders@surabooks.com PH:9600175757 / 8124301000

www.surabooks.com

This is Only for Sample for Full Book Order Online or Available at All Leading Bookstores

12 ஆம் வகுப்பு

அரசு துணைத்தேர்வு - ஆகஸ்ட் - 2021

பதிவு எண்

PART - III

கால அளவு : 3.00 மணி நேரம்]   **கணிதவியல்** (விடைகளுடன்)   [மொத்த மதிப்பெண்: 90

அறிவுரைகள்: (1) அனைத்து வினாக்களும் சரியாகப் பதிவாகி உள்ளதா என்பதனைச் சரிபார்த்துக் கொள்ளவும். அச்சுப்பதிவில் குறையிருப்பின், அறைக் கண்காணிப்பாளரிடம் உடனடியாகத் தெரிவிக்கவும்.

(2) **நீலம்** அல்லது **கருப்பு** மையினை மட்டுமே எழுதுவதற்கும், அடிக்கோடிடுவதற்கும் பயன்படுத்த வேண்டும். படங்கள் வரைவதற்கு பென்சில் பயன்படுத்தவும்.

பகுதி - I

குறிப்பு: (i) **அனைத்து** வினாக்களுக்கும் விடையளிக்கவும்.

(ii) கொடுக்கப்பட்டுள்ள மாற்று விடைகளில் மிகவும் ஏற்புடைய விடையைத் தேர்ந்தெடுத்துக் குறியீட்டுடன் விடையினையும் சேர்த்து எழுதவும்.

(20 × 1 = 20)

1. மெய் எண்களின் கணம் $\mathbb{R}$-ன் மீது '$*$' பின்வருமாறு வரையறுக்கப்படுகிறது எனில், கீழ்க்காண்பவைகளில் எது $\mathbb{R}$-ன் மீது ஈருறுப்புச் செயலி அல்ல?

(1) $a*b = a$ (2) $a*b = \min(a.b)$
(3) $a*b = a^b$ (4) $a*b = \max(a,b)$

2. $\sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) + \cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$ -ன் மதிப்பு :

(1) 0 (2) $\frac{\pi}{2}$ (3) $\frac{\pi}{3}$ (4) π

3. $P(x, y)$ என்ற புள்ளி, குவியங்கள் $F_1(3,0)$ மற்றும் $F_2(-3,0)$ கொண்ட கூம்பு வளைவு $16x^2 + 25y^2 = 400$-ன் மீதுள்ள புள்ளி எனில் $PF_1 + PF_2$-ன் மதிப்பு:

(1) 10 (2) 8 (3) 12 (4) 6

4. $\hat{i}+\hat{j}, \hat{i}+2\hat{j}, \hat{i}+\hat{j}+\pi\hat{k}$ என்ற வெக்டர்களை ஒரு புள்ளியில் சந்திக்கும் விளிம்புகளாகக் கொண்ட இணைகரத் திண்மத்தின் கன அளவு:

(1) π (2) $\frac{\pi}{2}$ (3) $\frac{\pi}{4}$ (4) $\frac{\pi}{3}$

5. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^7 x\, dx =$

(1) $\frac{\pi}{2}$ (2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^7 x\, dx$
(3) 0 (4) 1

6. 1, 2, 3, 4, 5, 6 எண்ணிடப்பட்ட அறுபக்க பகடையும், 1, 2, 3, 4 என எண்ணிடப்பட்ட நான்கு பக்க பகடையும் சோடியாக உருட்டப்பட்டு இரண்டும் காட்டும் எண்களின் கூட்டல் தொகை தீர்மானிக்கப்படுகிறது. இந்த கூட்டலைக் குறிக்கும் சமவாய்ப்பு மாறி X எனில், கூடுதல் 7-ன் நேர்மாறு பிம்பத்தின் உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை :

(1) 3 (2) 1 (3) 4 (4) 2

7. A, B மற்றும் C என்பன நேர்மாறு காணத்தக்கவாறு ஏதேனுமொரு வரிசையில் உள்ள அணிகள் எனில் பின்வருவனவற்றில் எது உண்மையல்ல?

(1) $\det A^{-1} = (\det A)^{-1}$
(2) $\text{adj } A = |A|A^{-1}$
(3) $(ABC)^{-1} = C^{-1}B^{-1}A^{-1}$
(4) $\text{adj }(AB) = (\text{adj } A)(\text{adj } B)$

8. $\vec{r}.\left(2\hat{i}-\lambda\hat{j}+\hat{k}\right) = 3$ மற்றும் $\vec{r}.\left(4\hat{i}+\hat{j}-\mu\hat{k}\right) = 5$ ஆகிய தளங்கள் இணை எனில், λ மற்றும் μ -ன் மதிப்புகள் முறையே:

(1) $-\frac{1}{2}, -2$ (2) $\frac{1}{2}, -2$
(3) $\frac{1}{2}, 2$ (4) $-\frac{1}{2}, 2$

9. ஒரு கன சதுரத்தின் பக்க அளவு 4 செ.மீ மற்றும் அதன் பிழை 0.1 செ.மீ. எனில் கன அளவு கணக்கீட்டில் ஏற்படும் பிழை (கன செ.மீட்டரில்) :

(1) 2 (2) 0.4 (3) 4.8 (4) 0.45

10. $f(x) = \frac{1}{12}$, $a < x < b$ எனும் சார்பு ஒரு தொடர்ச்சியான சமவாய்ப்பு மாறி X-ன் நிகழ்தகவு அடர்த்தி சார்பினைக் குறிக்கிறது எனில், பின்வருவனவற்றுள் எது a மற்றும் b -ன் மதிப்புகளாக இருக்க இயலாது?

(1) 7 மற்றும் 19 (2) 0 மற்றும் 12
(3) 16 மற்றும் 24 (4) 5 மற்றும் 17

orders@surabooks.com PH:9600175757 / 8124301000

This is Only for Sample for Full Book Order Online or Available at All Leading Bookstores

11. $\frac{dy}{dx} + P(x)y = 0$ -ன் தீர்வு :

(1) $x = ce^{-\int pdy}$ (2) $y = ce^{\int pdx}$

(3) $x = ce^{\int pdy}$ (4) $y = ce^{-\int pdx}$

12. t என்ற காலத்தில் ஒரு நகரும் 't' துகளின் நிலை $s(t) = 5t^2 - 2t - 8$ எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. துகள் ஓய்வு நிலைக்கு வரும் நேரம் :

(1) 1 (2) 0 (3) 3 (4) $\frac{1}{3}$

13. $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$ -ன் நேர்மாறு :

(1) $\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -5 & -3 \end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}$

(3) $\begin{bmatrix} -3 & 5 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ (4) $\begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$

14. $f(x) = x^2$, என்ற சார்பு $[0, \infty)$ என்ற இடைவெளியில் :

(1) கணக்கிட இயலாது

(2) ஏறும் சார்பு

(3) ஏறும் மற்றும் இறங்கும் சார்பு

(4) இறங்கும் சார்பு

15. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos x \, dx$ -இன் மதிப்பு :

(1) 0 (2) $\frac{3}{2}$ (3) $\frac{2}{3}$ (4) $\frac{1}{2}$

16. $x^3 + 64$ -ன் ஒரு பூச்சியமாக்கி :

(1) $4i$ (2) 0 (3) -4 (4) 4

17. $\frac{(x-1)^2}{16} - \frac{(y+1)^2}{25} = 1$ என்ற அதிபரவளையத்தின் மையம் :

(1) $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ (2) $(-1, 1)$

(3) $(1, -1)$ (4) $(0, 0)$

18. $\frac{d^2y}{dx^2} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{1}{4}} = 0$ என்ற வகைக்கெழு சமன்பாட்டின் வரிசை மற்றும் படி :

(1) 2, 6 (2) 2, 3

(3) 2, 4 (4) 3, 3

19. $|z| = 1$, எனில் $\frac{1+z}{1+\bar{z}}$ -ன் மதிப்பு :

(1) $\frac{1}{z}$ (2) z (3) 1 (4) $\bar{z}$

20. கலப்பெண் $(i^{25})^3$ -இன் மதிப்பு :

(1) 1 (2) i (3) $-i$ (4) -1

பகுதி - II

குறிப்பு: எவையேனும் **ஏழு** வினாக்களுக்கு விடையளிக்கவும். அவற்றில் வினா எண் **30** -க்கு கட்டாயம் விடையளிக்க வேண்டும். **(7 × 2 = 14)**

21. $z = (2 + 3i)(1 - i)$ எனில் $z^{-1} = \frac{5}{26} - i\frac{1}{26}$ என நிறுவுக.

22. $x^2 - 5x + 6 = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் மூலங்கள் α மற்றும் β எனில் $\alpha^2 - \beta^2 = \pm 5$ என நிரூபிக்கவும்.

23. x - ன் எம்மதிப்பிற்கு $\sin x = \sin^{-1} x$ ஆகும்?

24. $2\hat{i} + 3\hat{j} + \hat{k}$, $\hat{i} - 2\hat{j} + 2\hat{k}$ மற்றும் $3\hat{i} + \hat{j} + 3\hat{k}$ என்ற மூன்று வெக்டர்கள் ஒரு தள வெக்டர்கள் என நிரூபிக்கவும்.

25. $\lim_{x \to \infty} \left(\frac{e^x}{x^m}\right) = \infty$ என நிரூபிக்கவும். (இங்கு m என்பது ஓர் மிகை முழு எண்)

26. $g(x) = x^2 + \sin x$ எனில் dg -ஐக் காண்க.

27. $\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{1-y^2}{1-x^2}}$ என்பதன் தீர்வு $\sin^{-1} y = \sin^{-1} x + C$ அல்லது $\sin^{-1} x = \sin^{-1} y + C$ என நிறுவுக.

28. சமவாய்ப்பு மாறி X -ன் பரவல் சார்பு

$$F(x):F(x) = \begin{cases} 0, & -\infty < x < 0 \\ \frac{1}{2}(x^2 + x) & 0 \le x < 1 \\ 1, & 1 \le x < \infty \end{cases}$$ எனில் அதன் நிகழ்தகவு அடர்த்தி சார்பு

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(2x+1) & ; 0 \le x < 1 \\ 0 & ; \text{பிற} \end{cases}$$ என நிரூபிக்கவும்.

29. சமவாய்ப்பு மாறி X-யின் நிகழ்தகவு அடர்த்தி சார்பு $f(x) = \begin{cases} kxe^{-2x}, & x > 0 \\ 0, & x \le 0 \end{cases}$ எனில் k-ன் மதிப்பு 4 என நிறுவுக.

30. $y = A \sin x$, (A என்பது எதேச்சை மாறிலி) என்பதன் வகைக்கெழுச் சமன்பாடு $y = y' \tan x$ எனக் காட்டுக.

www.surabooks.com

SURA'S

12TH STD SCHOOL GUIDES

2022-23 EDITION

Call @
9600175757
8124301000
orders@surabooks.com

Buy Online @

surabooks.com