சுராவின்

கணிதவியல்

12ஆம் வகுப்பு

புதிய பாடத்திட்டம் மற்றும் புதிய பாடப்புத்தகத்தின்படி தயாரிக்கப்பட்டது

தொகுதி - I & II

சிறப்பம்சங்கள்

- பாட நூலில் உள்ள பயிற்சி வினாக்களுக்கு முழுமையான, எளிமையான தீர்வுகள்.
- ஒவ்வோர் பாடத்திற்கும் நினைவில் கொள்ள வேண்டிய சூத்திரங்கள்.
- கூடுதலான பயிற்சி வினா விடைகள்.
- மாதிரி வினாத்தாள்கள் 1 முதல் 6 வரை (PTA) வினாக்கள் ஆங்காங்கே சுட்டிக்காட்டப்பட்டுள்ளன.
- அரசு மாதிரி வினாத்தாள்-2019
- காலாண்டு பொதுத்தேர்வு - 2019
- அரையாண்டு பொதுத்தேர்வு - 2019
- பொதுத்தேர்வு மார்ச் - 2020 வினாத்தாள் விடைகளுடன்

சுரா பப்ளிகேஷன்ஸ்
சென்னை

2021-22 புதிய பதிப்பு

ISBN : **978-93-5330-143-9**
குறியீட்டு எண் : SG 326

எழுதி வழங்கியவர்
திரு.G. **செல்வராஜ்** M.Sc., M.Ed., M.Phil. *சென்னை*

திருத்தியவர்
திரு.S. **சதிஷ்** M.Sc., M.Phil.

மதிப்பாளர்
திரு. S. **நிரஞ்சன்** B.Tech., (NITT) PGDM (IIM).
சென்னை

தலைமை அலுவலகம்:
1620, 'ஜே' பிளாக், 16-ஆவது பிரதான சாலை,
அண்ணா நகர், சென்னை-600 040.
☎ 044-4862 9977, 044-486 27755
81242 01000/ 81243 01000
e-mail : orders @surabooks.com
website : www.surabooks.com

பதிப்பாசிரியர் உரை

12ம் வகுப்பிற்கான சுராவின் **கணிதவியல்** வழிகாட்டியை வெளியிடுவதில் பெருமிதமும் மகிழ்ச்சியும் அடைகிறோம். **கணிதவியல்** பாடங்களுக்கான வினா விடைகள் மிகவும் எளிமையாக, சுலபமாக புரிந்துகொள்ளும் விதத்தில் தரப்பட்டுள்ளன.

சுராவின் **கணிதவியல்** வழிகாட்டி மாணவர்களின் எல்லாத் தேவைகளையும் கருத்தில் கொண்டு உருவாக்கப்பட்டுள்ளது. பாடநூலை நன்கு மதிப்பாய்வு செய்து மாணவர்கள் எல்லாப் பாடங்களையும் வெகுவாக உட்கிரகித்து அறிந்துகொண்டு தேர்வை சுலபமாக எழுதி அதிக மதிப்பெண்களைப் பெற்று வெற்றியாளர்களாகும் விதத்தில், நமது வெற்றிக்கான இந்த வழிகாட்டி தயாரிக்கப்பட்டுள்ளது.

ஆசிரியர்களுக்கு பாடம் நடத்துவதிலும், மாணவர்களுக்குக் கற்றுக்கொள்வதிலும் இந்த வழிகாட்டி துணையாக இருக்கும்.

அரசு பொதுத் தேர்வுக்கான **புதிய மதிப்பீட்டு முறையில் 100 மதிப்பெண்கள் வடிவமைப்பில், 90 மதிப்பெண்களுக்கான எழுத்துத் தேர்வின் வினாத்தாள் அடிப்படையில்** நமது வழிகாட்டி உருவாக்கப்பட்டுள்ளதால், தேர்வுகளை மிகச் சரியான விதத்தில் எதிர்கொள்ளலாம்.

நமது சுராவின் **கணிதவியல்** வழிகாட்டியில் இது போன்ற பல சிறப்பம்சங்கள் அடங்கியிருந்தாலும், **கணிதவியல்** பாடத்தை மாணவர்கள் புரிந்துகொள்ள உதவிடும் ஆசிரியர்களின் பணியும் மகத்தானது என்பதை மறுப்பதற்கில்லை.

ஆசிரியர்களின் கற்றுத்தரும் பணியில் உறுதுணையாகவும், மாணவர்கள் பாடங்களைக் கற்கும் விதத்தில் ஊக்கம் தரும் வகையிலும் நமது வழிகாட்டி திகழும் என நம்புகிறோம்.

இறையருளை வேண்டுகிறோம்.

நலமே விளைக!

சுபாஷ் ராஜ், B.E., M.S.,
- பதிப்பகத்தார்

வாழ்த்துக்கள் !!!

மேலும் விவரங்களுக்கு / தொடர்புக்கு
புத்தகத்தில் உள்ள சந்தேகங்களுக்கு : enquiry@surabooks.com
புத்தகங்கள் வாங்க : orders@surabooks.com
தொடர்புக்கு : 80562 94222 / 80562 15222
வாட்ஸ்அப் : 8124201000 / 9840926027
ஆன்லைன் வலைதளம் : www.surabooks.com
பாடக் குறிப்புகளின் தொகுக்கப்பட்ட பகுதிகளை எமது http://tnkalvi.in இணையதளத்திலிருந்து இலவசமாக பதிவிறக்கிக்கொள்ளலாம்

பொருளடக்கம்

தொகுதி - I

தொகுதி - II

TO ORDER WITH US

SCHOOLS and TEACHERS:

We are grateful for your support and patronage to 'SURA PUBLICATIONS'
Kindly prepare your order in your School letterhead and send it to us.
For Orders contact: 81242 01000 / 81243 01000

DIRECT DEPOSIT

A/c Name	:	**Sura Publications**
Our A/c No.	:	**36550290536**
Bank Name	:	**STATE BANK OF INDIA**
Bank Branch	:	PADI
IFSC	:	SBIN0005083

A/c Name	:	**Sura Publications**
Our A/c No.	:	**21000210001240**
Bank Name	:	**UCO BANK**
Bank Branch	:	Anna Nagar West
IFSC	:	UCBA0002100

A/c Name	:	**Sura Publications**
Our A/c No.	:	**6502699356**
Bank Name	:	**INDIAN BANK**
Bank Branch	:	ASIAD COLONY
IFSC	:	IDIB000A098

A/c Name	:	**Sura Publications**
Our A/c No.	:	**1154135000017684**
Bank Name	:	**KVB BANK**
Bank Branch	:	Anna Nagar
IFSC	:	KVBL0001154

After Deposit, please send challan and order to our address.
email : orders@surabooks.com / Whatsapp : 81242 01000.

DEMAND DRAFT / CHEQUE

Please send Demand Draft / cheque in favour of '**SURA PUBLICATIONS**' payable at **Chennai**.

The Demand Draft / cheque should be sent with your order in School letterhead.

STUDENTS :

Order via Money Order (M/O) to

SURA PUBLICATIONS
1620, 'J' Block, 16th Main Road, Anna Nagar,
Chennai - 600 040.
Phones : 044-4862 9977, 044-486 27755
Mobile : 80562 94222 / 80562 15222
E-mail : orders@surabooks.com Website : www.surabooks.com

தொகுதி - I

கணிதவியல்

பொருளடக்கம்

தொகுதி - I

அத்தியாயம்

1

அணிகள் மற்றும் அணிக்கோவைகளின் பயன்பாடுகள்

முக்கிய வரையறைகள்

- $|A| \neq 0$, எனில் A ஒரு பூச்சியமற்ற கோவை அணி மற்றும் $y\,|A| = 0$, எனில் A ஒரு பூச்சியக்கோவை அணி.
- A–ன் இணைக்காரணி அணியின் நிரை நிரல் மாற்று அணி A–ன் சேர்ப்பு அணி என வரையறுக்கப்படுகிறது (adj A).
- $AB = BA = I_n$, எனில் அணி B A-ன் நேர்மாறு அணி எனப்படும்.
- ஒரு சதுர அணிக்கு நேர்மாறு இருப்பின் அது ஒருமைத்தன்மை வாய்ந்ததாகும்.
- A ஒரு பூச்சியமற்றக் கோவை அணி எனில் மட்டுமே A^{-1} காண இயலும்.
- பூச்சியக் கோவை அணிக்கு நேர்மாறு காண இயலாது.
- A என்பது பூச்சியமற்றக் கோவை அணி மற்றும் $AB = AC$ எனில், $B = C$ (இடது நீக்கல் விதி).
- A என்பது பூச்சியமற்ற கோவை அணி மற்றும் $BA = CA$ எனில், $B = C$ (வலது நீக்கல் விதி).
- A மற்றும் B என்பன n, வரிசையுடைய பூச்சியமற்ற கோவை அணிகள் எனில் (adj AB) = (adj B) (adj A)
- ஒரு சதுர அணி A-க்கு $AA^T = A^TA = I$ எனில், A ஆனது செங்குத்து அணி எனப்படும்.
- A, B என்ற இரு ஒரே வரிசையுடைய அணிகளில் ஏதாவது ஓர் அணியை தொடக்கநிலை உருமாற்றங்கள் மூலம் மற்ற அணியாகப் பெற முடியுமெனில், Aயும் Bயும் சமான அணிகள் என்றழைக்கப்படும் (A~B).
- ஓர் அணியில் அனைத்து பூச்சிய நிரைகளும் அணியின் அடிப்பகுதி நிரைகளாக அமைந்து, எந்தவொரு கீழ்வரிசை - நிரையின் முதல் பூச்சியமற்ற உறுப்பானது அந்நிரைக்கு மேலாக அமைந்து நிரைகள் ஒவ்வொன்றின் முதல் பூச்சியமற்ற உறுப்பிற்கு வலதுபுறமாக அமைந்தால் அவ்வணியானது நிரை – ஏறுபடி வடிவில் இருக்கும்.
- ஓர் அணி A- இன் தரம் என்பது அதன் பூச்சியமற்ற சிற்றணிக் கோவையின் உச்ச வரிசையாகும் $[\rho(A)]$.
- நிரை ஏறுபடி வடிவிலுள்ள ஓர் அணியின் அணித்தரம் அப்பூச்சிய நிரைகளின் எண்ணிக்கையாகும்.
- ஓர் அலகு அணியில் ஒரே ஒரு தொடக்க நிலை உருமாற்றத்தினால் கிடைக்கும் அணியை தொடக்க நிலை அணி என வரையறுக்கப்படுகிறது. ஒரு வரிசைக்கிரமமான தொடக்கநிலைச் செயலிகளைக் கொண்டு ஒவ்வொரு பூச்சியமற்ற கோவை அணியினை ஓர் அலகு அணியாக உருமாற்றம் செய்யலாம்.
- ஒரு நேரியச் சமன்பாட்டுத் தொகுப்பானது குறைந்தது ஒரு தீர்வு பெற்றிருந்தால், தொகுப்பானது ஒருங்கமைவுடையது எனப்படும்.
- ஒரு தீர்வு கூட பெறவில்லையெனில் தொகுப்பானது ஒருங்கமைவற்றது எனப்படும்.

நினைவில் கொள்ள வேண்டிய சூத்திரங்கள்

✦ a_{ij} –ன் இணைக்காரணி $A_{ij} = (-1)^{i+j} a_{ij}$, இதை M_{ij} –ன் சிற்றணிக்கோவை M_{ij}.

✦ ஒவ்வொரு n வரிசையுடைய சதுர அணி A–விற்கும், $A(\text{adj } A) = (\text{adj } A)A = |A| I_n$.
$AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$

✦ A என்பது பூச்சியமற்றக் கோவை அணி எனில்

(i) $|A^{-1}| = \dfrac{1}{|A|}$

(ii) $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

(iii) $(\lambda A^{-1}) = \dfrac{1}{\lambda} A^{-1}$ இங்கு λ என்பது பூச்சியமற்ற திசையிலி.

நேர்மாறுகளின் வரிசை மாற்று விதி :

✦ $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ இங்கு A மற்றும் B என்பன பூச்சியமற்ற கோவை அணிகள் ஒரே வரிசையுடையவைகள்

✦ இரட்டிப்பு நேர்மாறு விதி

A என்பது பூச்சியமற்றக் கோவை அணி எனில் A^{-1} யும் பூச்சியமற்ற கோவை அணி மற்றும் $(A^{-1})^{-1} = A$.

✦ A என்பது n வரிசையுடிய பூச்சியமற்றக் கோவை அணி எனில்,

(i) $(\text{adj } A)^{-1} = \text{adj } (A^{-1}) = \dfrac{1}{|A|} \cdot A$

(ii) $|\text{adj } A| = |A|^{n-1}$

(iii) $\text{adj } (\text{adj } A) = |A|^{n-2} A$

(iv) $\text{adj } (\lambda A) = \lambda^{n-1} \text{adj } (A)$ இங்கு λ என்பது பூச்சியமற்ற திசையிலி

(v) $|\text{adj } (\text{adj } A)| = |A|^{(n-1)^2}$

(vi) $(\text{adj } A)^T = \text{adj } (A^T)$

✦ ஓர் அணியில் குறைந்தது ஒரு பூச்சியமற்ற உறுப்பு இருப்பின் $\rho(a) \geq 1$.

✦ அலகு அணி I_n -ன் தரம் n ஆகும்.

✦ A–ன் வரிசை $m \times n$ எனில் $\rho(A) \leq \{m, n\}$– ன் மீச்சிறு.

✦ n வரிசையுடைய ஒரு சதுர அணிக்கு நேர்மாறு காணத் தேவையான மற்றும் போதுமான நிபந்தனை $\rho(A) = n$.

✦ தொடக்க நிலைச் செயலிகள் மூலம் A என்ற பூச்சியமற்றக் கோவை அணியை, I_n வடிவத்திற்கு உருமாற்றுவது காஸ் ஜோர்டன் முறையாகும்.

நேர்மாறு அணி காணல் முறை :

✦ $AX = B$ க்கான தீர்வு $X = A^{-1}B$ இங்கு A மற்றும் B ஒரே வரிசையுடைய சதுர அணிகள் மற்றும் பூச்சியக் கோவை அணி.

கிராமரின் விதி :

✦ $\Delta = 0$, எனில் கிராமரின் விதியை பயன்படுத்த இயலாது, $x_1 = \dfrac{\Delta_1}{\Delta}, x_2 = \dfrac{\Delta_2}{\Delta}, x_3 = \dfrac{\Delta_3}{\Delta}$

காஸ்ஸியன் நீக்கல் முறை :

நேரியச் சமன்பாடுகளின் தொகுப்பின் விரிவுப்படுத்தப்பட்ட அணியை ஏறுபடி வடிவத்திற்கு உருமாற்றி பின்பு பின்னோக்கிப் பிரதியிடல் மூலம் தீர்வு காண்பதாகும்.

ரூச்சி - கபெல்லி தேற்றம் :

$AX = B$ என்ற சமன்பாடுகளின் தொகுப்பானது ஒருங்கமைவு உடையதற்கு $\rho(A) = \rho([A|B])$ எனில் மட்டும்.

(i) $\rho(A) = \rho([A|B]) = n$, மாறிகளில் எண்ணிக்கை, தொகுப்பானது ஒருங்கமைவு உடையது மற்றும் ஒரே தீர்வை கொண்டிருக்கும்.

(ii) $\rho(A) = \rho([A|B]) = n - k, k \neq 0$ எனில் தொகுப்பு ஒருங்கமைவு உடையது மற்றும் எண்ணிக்கையற்ற தீர்வுகளை கொண்டிருக்கும்.

(iii) $\rho(A) \neq \rho([A|B])$, எனில் தொகுப்பு ஒருங்கமைவு அற்றது மற்றும் தீர்வு இல்லை.

சமப்படித்தான நேரியச் சமன்பாடுகள் தொகுப்பு :

(i) $\rho(A) = \rho([A|B]) = n$, தொகுப்பு ஒரே ஒரு தீர்வை கொண்டிருக்கும், அது வெளிப்படையான தீர்வாகும், $|A| \neq 0$.

(ii) $\rho(A) = \rho([A|O]) < n$, வெளிப்படையற்ற தீர்வுகளை கொண்டிருக்கும்.

வெளிப்படையற்ற தீர்வுக்கு, $|A| = 0$.

✦ $A^{-1} = \pm \dfrac{1}{\sqrt{|adj\,A|}} \cdot \text{adj } A$ ✦ $A = \pm \dfrac{1}{\sqrt{|adj\,A|}} \cdot \text{adj (adj } A)$

பயிற்சி 1.1

1. பின்வரும் அணிகளுக்குச் சேர்ப்பு அணி காண்க:

(i) $\begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}$ **(ii)** $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \\ 3 & 7 & 2 \end{bmatrix}$

(iii) $\dfrac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \end{bmatrix}$

தீர்வு : (i) $\begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}$

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 6 & 2 \end{pmatrix} \text{ என்க.}$$

$$\text{adj } A = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -6 & -3 \end{pmatrix}$$

[முதன்மை மூலைவிட்ட உறுப்புகளை இடமாற்ற மற்றும் மூலைவிட்டமல்லாத உறுப்புகளின் குறியை மாற்றுக]

(ii) $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \\ 3 & 7 & 2 \end{bmatrix}$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \\ 3 & 7 & 2 \end{pmatrix} \text{ என்க.}$$

$$\text{adj } A = \begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 7 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 7 & 2 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} +(8-7) & -(6-3) & +(21-12) \\ -(6-7) & +(4-3) & -(14-9) \\ +(3-4) & -(2-3) & +(8-9) \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 9 \\ 1 & 1 & -5 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}^T$$

$$\text{adj } A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & 1 & 1 \\ 9 & -5 & -1 \end{bmatrix}$$

(iii) $\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \end{bmatrix}$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \end{bmatrix} \text{ என்க.}$$

மற்றும் $\lambda = \frac{1}{3}$

$\text{adj } (\lambda A) = \lambda^{n-1}(\text{adj } A)$ ஆதலால்

$$\text{adj}\left(\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \end{bmatrix}\right) = \left(\frac{1}{3}\right)^2$$

$$\text{adj}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

∴ தேவையான அணியின் சேர்ப்பு

$$= \frac{1}{9}\begin{bmatrix} +\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} \end{bmatrix}^T$$

$$= \frac{1}{9}\begin{bmatrix} (2+4) - & (-4-2) + & (4-1) \\ -(4+2)+ & (4-1) & +(-4-2) \\ +(4-1) & -(4+2)+ & (2+4) \end{bmatrix}^T$$

$$= \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 6 & 6 & 3 \\ -6 & 3 & 6 \\ 3 & -6 & 6 \end{bmatrix}^T = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 6 & -6 & 3 \\ 6 & 3 & -6 \\ 3 & 6 & 6 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{3}{9}\begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

[ஒவ்வொரு வரிசையிலும் 3 ஐ பொதுவில் எடுக்க]

$$= \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

2. பின்வரும் அணிகளுக்கு நேர்மாறு (காண முடியுமெனில்) நேர்மாறு காண்க:

(i) $\begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$ **(ii)** $\begin{bmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \end{bmatrix}$

(iii) $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \\ 3 & 7 & 2 \end{bmatrix}$

தீர்வு : **(i)** $\begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \text{ என்க}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = 6 - 4 = 2 \neq 0$$

A பூச்சியமற்றக் கோவை அணி ஆதலால் A^{-1} காணலாம்.

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\text{ adj } A$$

இங்கு $\text{adj } A = \begin{bmatrix} -3 & -4 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$

[முதன்மை மூலைவிட்ட உறுப்புகளை இடமாற்றம் மற்றும் மூலைவிட்டத்தில் இல்லாத உறுப்புகளின் குறியை மாற்றுக]

$$\therefore A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -3 & -4 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$$

(ii) $\begin{bmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \end{bmatrix}$

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \end{bmatrix} \text{ என்க.}$$

R_1 மூலம் விரிவுபடுத்த,

$$|A| = 5\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$
$$= 5(25-1) - 1(5-1) + 1(1-5)$$
$$= 5(24) - 1(4) + 1(-4)$$
$$= 120 - 4 - 4 = 120 - 8 = 112 \neq 0$$

A ஒரு பூச்சியமற்றக் கோவை எனில் A^{-1} சாத்தியம்.

$$\text{adj } A = \begin{bmatrix} +\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} \end{bmatrix}^T$$

$$= \begin{bmatrix} +(25-1) & -(5-1) & +(1-5) \\ -(5-1) & +(25-1) & -(5-1) \\ +(1-5) & +(5-1) & +(25-1) \end{bmatrix}^T$$

$$= \begin{bmatrix} 24 & -4 & -4 \\ -4 & 24 & -4 \\ -4 & -4 & 24 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 24 & -4 & -4 \\ -4 & 24 & -4 \\ -4 & -4 & 24 \end{bmatrix}$$

ஒவ்வொரு உறுப்பிலிருந்தும் 4 ஐ பொதுவில் எடுக்க,

$$\text{adj } A = 4\begin{bmatrix} 6 & -1 & -1 \\ -1 & 6 & -1 \\ -1 & -1 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\therefore A^{-1} = \frac{1}{|A|}\text{ adj } A = \frac{1}{112}\cdot 4\begin{bmatrix} 6 & -1 & -1 \\ -1 & 6 & -1 \\ -1 & -1 & 6 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{28}\begin{bmatrix} 6 & -1 & -1 \\ -1 & 6 & -1 \\ -1 & -1 & 6 \end{bmatrix}$$

(iii) $\begin{bmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{1} \\ \mathbf{3} & \mathbf{4} & \mathbf{1} \\ \mathbf{3} & \mathbf{7} & \mathbf{2} \end{bmatrix}$

$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \\ 3 & 7 & 2 \end{bmatrix}$ என்க.

R_1 மூலம் விரிவுபடுத்த கிடைப்பது,

$$|A| = 2\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 7 & 2 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 7 \end{vmatrix}$$

$$= 2(8-7) - 3(6-3) + 1(21-12)$$

$$= 2(1) - 3(3) + 1(9)$$

$$= 2 - \cancel{9} + \cancel{9} = 2 \neq 0$$

A ஒரு பூச்சியமற்றக் கோவை அணி ஆதலால் A^{-1} சாத்தியம்

$$\text{adj } A = \begin{bmatrix} +\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 7 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 7 & 2 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \end{bmatrix}^T$$

$$= \begin{bmatrix} +(8-7) & -(6-3) & +(21-12) \\ -(6-7) & +(4-3) & +(14-9) \\ +(3-4) & +(2-3) & +(8-9) \end{bmatrix}^T$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -3 & 9 \\ 1 & 1 & -5 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}^T$$

$$\text{adj } A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & 1 & 1 \\ 9 & -5 & -1 \end{bmatrix}$$

இங்கு, $A^{-1} = \dfrac{1}{|A|}\text{ adj } A$

$$\Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & 1 & 1 \\ 9 & -5 & -1 \end{bmatrix}$$

3. $\mathbf{F(\alpha) = \begin{bmatrix} \cos\alpha & 0 & \sin\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\alpha & 0 & \cos\alpha \end{bmatrix}}$ **எனில்,**
$\mathbf{[F(\alpha)]^{-1} = F(-\alpha)}$ **எனக்காட்டுக.** **[Hy - 2019]**

தீர்வு : $F(\alpha) = \begin{bmatrix} \cos\alpha & 0 & \sin\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\alpha & 0 & \cos\alpha \end{bmatrix}$ தரப்பட்டது.

R_1 மூலம் விரிவுபடுத்த கிடைப்பது,

$$|F(\alpha)| = \cos\alpha\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \cos\alpha \end{vmatrix} - 0 + \sin\alpha\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -\sin\alpha & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \cos\alpha(\cos - 0) + \sin\alpha(0 + \sin\alpha)$$

$$= \cos^2 + \sin^2\alpha = 1 \neq 0$$

F (α) ஒரு பூச்சியமற்றக் கோவை அணி ஆதலால், $[F(\alpha)]^{-1}$ காணலாம்.

இங்கு, adj (F(α)) =

$$\begin{bmatrix} +\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \cos\alpha \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -\sin\alpha & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0 & \sin\alpha \\ 0 & \cos\alpha \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} \cos\alpha & 0 \\ \sin\alpha & 0 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 0 & \sin\alpha \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} \cos\alpha & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \end{bmatrix}^T$$

$$= \begin{bmatrix} +(\cos\alpha - 0) & -(0) & +(0+\sin\alpha) \\ -(0) & +(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) & -(0) \\ +(0-\sin\alpha) & -(0) & +(\cos - 0) \end{bmatrix}^T$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\alpha & 0 & +\sin\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\alpha & 0 & \cos\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & 0 & -\sin\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ +\sin\alpha & 0 & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

$$\therefore F(\alpha)^{-1} = \frac{1}{|F(\alpha)|} \text{ adj } (F(\alpha))$$

$$[F(\alpha)]^{-1} = \frac{1}{1}\begin{bmatrix} \cos\alpha & 0 & -\sin\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ +\sin\alpha & 0 & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\alpha & 0 & -\sin\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ +\sin\alpha & 0 & \cos\alpha \end{bmatrix} \quad ...(1)$$

இங்கு, $F(-\alpha) = \begin{bmatrix} \cos(-\alpha) & 0 & \sin(-\alpha) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(-\alpha) & 0 & \cos(-\alpha) \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} \cos\alpha & 0 & -\sin\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\alpha & 0 & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

[$\because$ $\cos\alpha$ ஒரு இரட்டைச் சார்பு, $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$ மற்றும் $\sin\alpha$ ஒரு ஒற்றைச் சார்பு, $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$]

(1) மற்றும் (2)லிருந்து

$$[F(\alpha)]^{-1} = F(-\alpha)$$

எனவே நிரூபிக்கப்பட்டது.

4. $A = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$ எனில், $A^2 - 3A - 7I_2 = O_2$ எனக்காட்டுக. இதன் மூலம் A^{-1} காண்க.

தீர்வு : கொடுக்கப்பட்ட $A = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25-3 & 15-6 \\ -5+2 & -3+4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 22 & 9 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$$

$\therefore A^2 - 3A - 7I_2$

$$= \begin{bmatrix} 22 & 9 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} - 7\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 22-15-7 & 9-9+0 \\ -3+3+0 & 1+6-7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = O_2$$

எனவே நிரூபிக்கப்பட்டது.

$\therefore A^2 - 3A - 7I_2 = 0$

பின்புறமாக A^{-1} ஆல் பெருக்க கிடைப்பது,

$A^2 . A^{-1} - 3AA^{-1} - 7I_2 A^{-1} = 0.A^{-1}$

$\Rightarrow \quad A(AA^{-1}) - 3(AA^{-1}) - 7(A^{-1}) = 0$

[$\because I_2 A^{-1} = A^{-1}$ மற்றும் $|(0)A^{-1} = 0$]

$\Rightarrow \quad AI - 3I - 7A^{-1} = 0 \qquad [\because AA^{-1} = I]$

$\Rightarrow \quad AI - 3I = 7A^{-1}$

$\Rightarrow \quad A^{-1} = \frac{1}{7}[A - 3I] \qquad [\because AI = A]$

$\Rightarrow \quad A^{-1} = \frac{1}{7} = \left[\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right]$

$\Rightarrow \quad A^{-1} = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 5-3 & 3-0 \\ -1-0 & -2-3 \end{bmatrix} = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -5 \end{bmatrix}$

$$\therefore A^{-1} = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -5 \end{bmatrix}$$

5. $A = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} -8 & 1 & 4 \\ 4 & 4 & 7 \\ 1 & -8 & 4 \end{bmatrix}$ எனில், $A^{-1} = A^T$ நிறுவுக.

தீர்வு : கொடுக்கப்பட்ட $A = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} -8 & 1 & 4 \\ 4 & 4 & 7 \\ 1 & -8 & 4 \end{bmatrix}$

$$A^T = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} -8 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & -8 \\ 4 & 7 & 4 \end{bmatrix} \quad ...(1)$$

$(\lambda A)^{-1} = \frac{1}{\lambda}.A^{-1}$ என அறிவோம்.

$$A^{-1} = \left\{\frac{1}{9}\begin{bmatrix} -8 & 1 & 4 \\ 4 & 4 & 7 \\ 1 & -8 & 4 \end{bmatrix}\right\}^{-1} = \frac{1}{\frac{1}{9}} \cdot \begin{bmatrix} -8 & 1 & 4 \\ 4 & 4 & 7 \\ 1 & -8 & 4 \end{bmatrix}^T$$

இங்கு $\lambda = \frac{1}{9}$

$A^{-1} = 9B^{-1}$ இங்கு $B = \begin{bmatrix} -8 & 1 & 4 \\ 4 & 4 & 7 \\ 1 & -8 & 4 \end{bmatrix} \quad ...(2)$

இங்கு, $|B| = -8\begin{vmatrix} 4 & 7 \\ -8 & 4 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 4 & 7 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 4 & 4 \\ 1 & -8 \end{vmatrix}$

$= -8(16 + 56) - 1(16 - 7) + 4(-32 - 4)$

$= -8(72) - 1(9) + 4(-36) = -576 - 9 - 144$

$= -729$

$$\text{adj } B = \begin{bmatrix} +\begin{vmatrix} 4 & 7 \\ -8 & 4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 4 & 7 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 4 & 4 \\ 1 & -8 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -8 & 4 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} -8 & 4 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -8 & 1 \\ 1 & -8 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -8 & 4 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} -8 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} \end{bmatrix}^T$$

$$= \begin{bmatrix} +(16+56)-(16-7)+(-32-4) \\ -(4+32)+(-32-4)+(64-1) \\ +(7-16)-(-56-16)+(-32-4) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 72 & -9 & -36 \\ -36 & -36 & -63 \\ -9 & 72 & -36 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 72 & -36 & -9 \\ -9 & -36 & 72 \\ -36 & -63 & -36 \end{bmatrix}$$

$$= 9\begin{bmatrix} 8 & -4 & -1 \\ -1 & -4 & +8 \\ -4 & -7 & -4 \end{bmatrix}$$

$$\therefore B^{-1} = \frac{1}{|B|}\text{ adj } B = \frac{-9}{729}\begin{bmatrix} 8 & -4 & -1 \\ -1 & -4 & +8 \\ -4 & -7 & -4 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{81}\begin{bmatrix} -8 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & -8 \\ 4 & 7 & 4 \end{bmatrix}$$

(2) பிரதியிட கிடைப்பது,

$$A^{-1} = 9\cdot\frac{1}{81}\begin{bmatrix} -8 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & -8 \\ 4 & 7 & 4 \end{bmatrix} = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} -8 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & -8 \\ 4 & 7 & 4 \end{bmatrix} \quad ...(3)$$

(1) மற்றும் (3) லிருந்து கிடைப்பது, $A^T = A^{-1}$

6. $A=\begin{bmatrix} 8 & -4 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}$, எனில் A(adj A) = (adj A) A = |A| I_2 என்பதைச் சரிபார்க்க.

தீர்வு : கொடுக்கப்பட்ட $A = \begin{bmatrix} 8 & -4 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}$

$$\text{adj } A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}$$

[முதன்மை மூலைவிட்ட உறுப்புகளை இடமாற்ற மற்றும் மூலைவிட்டத்தில் இல்லாத உறுப்புகளின் குறியை மாற்ற]

$$|A| = 24-20 = 4$$

$$\therefore A(\text{adj } A) = \begin{bmatrix} 8 & -4 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 24-20 & 32-32 \\ -15+15 & -20+24 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \quad ...(1)$$

$$(\text{adj } A)(A) = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 8 & -4 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 24-20 & -12+12 \\ 40-40 & -20+24 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \quad ...(2)$$

$$|A|\, I_2 = 4\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \quad ...(3)$$

(1), (2) மற்றும் (3)லிருந்து,

$$A(\text{adj } A) = (\text{adj } A)A = |A|\, I_2$$

எனவே நிரூபிக்கப்பட்டது.

7. $A=\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 5 \end{bmatrix}$ மற்றும் $B=\begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$ எனில், $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ என்பதைச் சரிபார்க்க.

தீர்வு : கொடுக்கப்பட்ட $A=\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 5 \end{bmatrix}$ மற்றும் $B=\begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$

$$AB = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3+10 & -9+4 \\ -7+25 & -21+10 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 7 & -5 \\ 18 & -11 \end{bmatrix}$$

$|AB| = -77+90 = 13 \neq 0 \Rightarrow (AB)^{-1}$ காணலாம்

$|A| = 15-14 = 1 \neq 0 \Rightarrow A^{-1}$ காணலாம்

$|B| = -2+15 = 13 \neq 0 \Rightarrow B^{-1}$ காணலாம்

$$(AB)^{-1} = \frac{1}{|AB|}\text{ adj }(AB) = \frac{1}{13}\begin{pmatrix} -11 & 5 \\ -18 & 7 \end{pmatrix} \quad ...(1)$$

$$B^{-1} = \frac{1}{|B|}(\text{adj } B) = \frac{1}{13}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -5 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}(\text{adj } A) = \frac{1}{1}\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -7 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -7 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\therefore B^{-1}A^{-1} = \frac{1}{13}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -5 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -7 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{13}\begin{pmatrix} 10-21 & -4+9 \\ -25+7 & 10-3 \end{pmatrix} = \frac{1}{13}\begin{pmatrix} -11 & 5 \\ -18 & 7 \end{pmatrix} \quad ...(2)$$

(1) மற்றும் (2) லிருந்து

$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$. எனவே நிரூபிக்கப்பட்டது.

8. $\text{adj}(A) = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 2 \\ -3 & 12 & -7 \\ -2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, எனில் A - ஐ காண்க. [பிடிஏ - 6]

தீர்வு : கொடுக்கப்பட்ட $\text{adj } A = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 2 \\ -3 & 12 & -7 \\ -2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

$A = \pm \frac{1}{\sqrt{|\text{adj}\,A|}}.\text{adj (adj A)}$ என அறிவோம் ...(1)

$|\text{adj A}| = 2\begin{vmatrix}12 & -7\\ 0 & 2\end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix}-3 & -7\\ -2 & 2\end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix}-3 & 12\\ -2 & 0\end{vmatrix}$

[R_1 மூலம் விரிவுபடுத்தப்பட்டது]

$= 2(24-0) + 4(-6-14) + 2(0+24)$

$= 2(24) + 4(-20) + 2(24) = 48 - 80 + 48$

$= 96 - 80 = 16$ ... (2)

இங்கு, adj (adj A)

$$= \begin{bmatrix} +\begin{vmatrix}12 & -7\\ 0 & 2\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}-3 & -7\\ -2 & 2\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}-3 & 12\\ -2 & 0\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}-4 & 2\\ 0 & 2\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}2 & 2\\ -2 & 2\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}2 & -4\\ -2 & 0\end{vmatrix}\\ +\begin{vmatrix}-4 & 2\\ 12 & -7\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}2 & 2\\ -3 & -7\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}2 & -4\\ -3 & 12\end{vmatrix}\end{bmatrix}^T$$

$$= \begin{bmatrix} +(24-0)-(-6-14)+(0+24)\\ -(-8-0)+(4+4)-(0-8)\\ +(28-24)-(-14+6)+(24-12)\end{bmatrix}^T$$

$$= \begin{bmatrix}24 & 20 & 24\\ 8 & 8 & 8\\ 4 & 8 & 12\end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix}24 & 8 & 4\\ 20 & 8 & 8\\ 24 & 8 & 12\end{bmatrix}$$

$$= 4\begin{bmatrix}6 & 2 & 1\\ 5 & 2 & 2\\ 6 & 2 & 3\end{bmatrix} \quad ...(3)$$

(2) மற்றும் (3) ஐ (1) ல் பிரதியிட கிடைப்பது,

$$A = \pm\frac{1}{\sqrt{16}}.4\begin{bmatrix}6 & 2 & 1\\ 5 & 2 & 2\\ 6 & 2 & 3\end{bmatrix}$$

$$A = \pm\frac{4}{4}\begin{bmatrix}6 & 2 & 1\\ 5 & 2 & 2\\ 6 & 2 & 3\end{bmatrix} = \pm\begin{bmatrix}6 & 2 & 1\\ 5 & 2 & 2\\ 6 & 2 & 3\end{bmatrix}$$

9. $\text{adj}(A) = \begin{bmatrix}0 & -2 & 0\\ 6 & 2 & -6\\ -3 & 0 & 6\end{bmatrix}$ எனில் A^{-1} -ஐ காண்க.

தீர்வு : கொடுக்கப்பட்ட $\text{adj (A)} = \begin{bmatrix}0 & -2 & 0\\ 6 & 2 & -6\\ -3 & 0 & 6\end{bmatrix}$

$A^{-1} = \pm\frac{1}{\sqrt{|\text{adj}A|}}\text{(adj A)}$ என அறிவோம். ...(1)

$|\text{adj A}| = 0 + 2\begin{vmatrix}6 & -6\\ -3 & 6\end{vmatrix} + 0$

[R_1 மூலம் விரிவுபடுத்தப்பட்டது]

$= 2(36-18) = 2(18) = 36$

$$\therefore A^{-1} = \pm\frac{1}{\sqrt{36}}\begin{bmatrix}0 & -2 & 0\\ 6 & 2 & -6\\ -3 & 0 & 6\end{bmatrix}$$

$$= \pm\frac{1}{6}\begin{bmatrix}0 & -2 & 0\\ 6 & 2 & -6\\ -3 & 0 & 6\end{bmatrix}$$

10. $\text{adj } A = \begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 2 & 0\\ -1 & 0 & 1\end{bmatrix}$ எனில் adj (adj (A)) -ஐ காண்க.

தீர்வு : கொடுக்கப்பட்ட $\text{adj } A = \begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 2 & 0\\ -1 & 0 & 1\end{bmatrix}$

$$\text{இங்கு adj(adj A)} = \begin{bmatrix} +\begin{vmatrix}2 & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}0 & 0\\ -1 & 1\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}0 & 2\\ -1 & 0\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}0 & 1\\ 0 & 1\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1 & 0\\ -1 & 0\end{vmatrix}\\ +\begin{vmatrix}0 & 1\\ 2 & 0\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{vmatrix}\end{bmatrix}^T$$

$$= \begin{bmatrix}+(2-0) & -(0) & +(0+2)\\ -(0) & +(1+1) & -(0)\\ +(0-2) & -(0) & +(2-0)\end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix}2 & 0 & 2\\ 0 & 2 & 0\\ -2 & 0 & 2\end{bmatrix}^T$$

$$\text{adj (adj A)} = \begin{bmatrix}2 & 0 & -2\\ 0 & 2 & 0\\ 2 & 0 & 2\end{bmatrix}$$

11. $A = \begin{bmatrix}1 & \tan x\\ -\tan x & 1\end{bmatrix}$, எனில்

$A^T A^{-1} = \begin{bmatrix}\cos 2x & -\sin 2x\\ \sin 2x & \cos 2x\end{bmatrix}$ எனக்காட்டுக.

தீர்வு : கொடுக்கப்பட்ட $A = \begin{bmatrix}1 & \tan x\\ -\tan x & 1\end{bmatrix}$

$|A| = 1 + \tan^2 x$

$$\therefore A^{-1} = \frac{1}{|A|}\text{adj}A$$
$$= \frac{1}{1+\tan^2 x}\begin{bmatrix} 1 & -\tan x \\ \tan x & 1 \end{bmatrix}$$

[முதன்மை மூலைவிட்ட உறுப்புகளை இடமாற்ற மற்றும் மூலைவிட்டத்தில் இல்லாத உறுப்புகளின் குறியை மாற்ற]

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & -\tan x \\ \tan x & 1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore A^T A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -\tan x \\ \tan x & 1 \end{bmatrix} . \frac{1}{1+\tan^2 x}\begin{bmatrix} 1 & -\tan x \\ \tan x & 1 \end{bmatrix}$$
$$= \frac{1}{1+\tan^2 x}\begin{bmatrix} 1 & -\tan x \\ \tan x & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -\tan x \\ \tan x & 1 \end{bmatrix}$$
$$= \frac{1}{1+\tan^2 x}\begin{bmatrix} 1-\tan^2 x & -\tan x-\tan x \\ \tan x+\tan x & -\tan^2 x+1 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} \frac{1-\tan^2 x}{1+\tan^2 x} & \frac{-2\tan x}{1+\tan^2 x} \\ \frac{2\tan x}{1+\tan^2 x} & \frac{1-\tan^2 x}{1+\tan^2 x} \end{bmatrix}$$
$$A^T A^{-1} = \begin{bmatrix} \cos 2x & -\sin 2x \\ \sin 2x & \cos 2x \end{bmatrix}$$
$$\left[\because \sin 2x = \frac{2\tan x}{1+\tan^2 x} \text{ மற்றும் } \cos 2x = \frac{1-\tan^2 x}{1+\tan^2 x}\right]$$

எனவே நிரூபிக்கப்பட்டது.

12. $A = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & 7 \\ 7 & 7 \end{bmatrix}$ **எனில் A -ஐ காண்க.**

தீர்வு : கொடுக்கப்பட்ட $A\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & 7 \\ 7 & 7 \end{bmatrix}$

$$B = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \text{ மற்றும்}$$
$$C = \begin{bmatrix} 14 & 7 \\ 7 & 7 \end{bmatrix} \text{ என்க.}$$
$$\therefore AB = C$$

B^{-1} ஆல் பின்புறம் பெருக்க கிடைப்பது

$$A(BB^{-1}) = CB^{-1}$$
$$\Rightarrow A = CB^{-1} \qquad [\because BB^{-1} = I]$$
$$|B| = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ -1 & -2 \end{vmatrix}$$
$$= -10+3 = -7 \neq 0$$

$\therefore B^{-1}$ காணலாம்

$$B^{-1} = \frac{1}{|B|} \text{ adj } B = \frac{-1}{7}\begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$$
$$A = CB^{-1}$$
$$= \begin{bmatrix} 14 & 7 \\ 7 & 7 \end{bmatrix} . \left(\frac{-1}{7}\right)\begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$$
$$= 7\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\left(\frac{-1}{7}\right)\begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$$
$$= -\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$$
$$= -\begin{bmatrix} -4+1 & -6+5 \\ -2+1 & -3+5 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} -3 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$
$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

13. $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$**, மற்றும் AXB = C எனில், X என்ற அணியைக் காண்க.**

தீர்வு : கொடுக்கப்பட்ட $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ மற்றும் $C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ மேலும், A X B = C

A^{-1} ஆல் முன்புறம் பெருக்க கிடைப்பது,

$$(A^{-1}A)XB = A^{-1}C$$
$$\Rightarrow XB = A^{-1}C. \qquad [\because A^{-1}A = I]$$

B^{-1} ஆல் பின்புறம் பெருக்க கிடைப்பது

$$(XB)B^{-1} = (A^{-1}C)B^{-1}$$
$$\Rightarrow X = (A^{-1}C)B^{-1}$$
$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 0+2 = 2 \neq 0$$
$$\therefore A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{ adj } A = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$
$$|B| = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3+2 = 5 \neq 0$$
$$\therefore B^{-1} = \frac{1}{|B|} \text{ adj } B = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$
$$A^{-1}C = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$
$$= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0+2 & 0+2 \\ -2+2 & -2+2 \end{bmatrix}$$
$$= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}(2)\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\therefore X = Z(A^{-1}C).B^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 1-1 & 2+3 \\ 0+0 & 0+0 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{5}(5) \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\therefore X = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

14. $\mathbf{A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}}$ **எனில்** $\mathbf{A^{-1} = \frac{1}{2}(A^2 - 3I)}$ **எனக்காட்டுக.**

தீர்வு : கொடுக்கப்பட்ட $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

$$|A| = 0 - 1\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -1(0-1) + 1(1-0) = 1 + 1 = 2$$

$$\text{adj } A = \begin{bmatrix} +\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \end{bmatrix}^T$$

$$= \begin{bmatrix} (0-1) & -(0-1) & +(1-0) \\ -(0-1) & +(0-1) & -(0-1) \\ +(1-0) & -(0-1) & +(0-1) \end{bmatrix}^T$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad ...(1)$$

இங்கு $A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 0+1+1 & 0+0+1 & 0+1+0 \\ 0+0+1 & 1+0+1 & 1+0+0 \\ 0+1+0 & 1+0+0 & 1+1+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A^2 - 3I = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2-3 & 1-0 & 1-0 \\ 1-0 & 2-3 & 1-0 \\ 1-0 & 1-0 & 2-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad ...(2)$$

(1) மற்றும் (2)லிருந்து, $A^{-1} = \frac{1}{2}[A^2 - 3I]$

எனவே நிரூபிக்கப்பட்டது.

15. $\mathbf{\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}}$ **என்ற அணியை பிந்தையப் பெருக்கல் சங்கேத மொழியாக்க அணியாகக் கொண்டு [2 –3] [20 4] என்ற பெறப்பட்ட** $\mathbf{\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}}$**-ன் நேர்மாறு அணியின் பிந்தையப் பெருக்கற் சாவியாகக் கொண்டு சங்கேத மொழி மாற்றம் செய்க. இங்கு ஆங்கில எழுத்துகள் A – Z -க்கு முறையே எண்கள் 1 – 26 ஐயும், காலியிடத்திற்கு எண் 0 ஐயும் பொருத்தி சங்கேத மொழியாக்கம் மற்றும் மொழிமாற்றம் செய்க.**

தீர்வு : சங்கேத மொழியாக்குதலுக்கான $A = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ என்க.

$$|A| = -1 + 2 = 1 \neq 0$$

$$\therefore A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{adj } A = \frac{1}{1}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$$

ஆகையால் பெருக்கற் சாவி அணி $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$

சங்கேத மொழியாக்கப்பட்ட நிரை அணி	மொழி மாற்றத்தின் அணி	சங்கேத மொழி மாற்றம் செய்யப்பட்ட நிரை
[2 – 3]	$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$	= [2 + 6 2 + 3] = [8 5]
[20 4]	$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$	= [20 – 8 20 – 4] = [12 16]

சங்கேத மொழி மாற்றம் செய்யப்பட்ட நிரை அணிகளின் வரிசை பின்வருமாறு

[8 5], [12 16]

இங்கு $8^{வது}$ ஆங்கில எழுத்து H.
$5^{வது}$ ஆங்கில எழுத்து E.
$12^{வது}$ ஆங்கில எழுத்து L
மற்றும் $16^{வது}$ ஆங்கில எழுத்து P பெறுபவர் தாம் பெற்ற சங்கேத செய்தி "HELP" எனப் படிக்கிறார்.

பயிற்சி 1.2

1. பின்வரும் அணிகளுக்கு சிற்றணிக்கோவையை பயன்படுத்தி அணித்தரம் காண்க:

(i) $\begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ **(ii)** $\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 4 & -7 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$

(iii) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 3 & -6 & -3 & 1 \end{bmatrix}$ **[பிடிஏ - 5]**

(iv) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 4 & -6 \\ 5 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ **(v)** $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 3 \\ 8 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

தீர்வு : **(i)** $\begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \text{ என்க.}$$

A ஒரு 2×2 வரிசை அணி

$\therefore \rho(A) \le (2, 2)$ - மீச்சிறு $= 2$

A -ன் பூச்சியமற்ற சிற்றணிக் கோவைகளின் உச்ச வரிசை 2 ஆகும்.

இது $\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 4 = 0$

ஆகையால், $\rho(A) < 2$

அடுத்து 1 வரிசையுடைய சிற்றணிக் கோவையை தேர்வு செய்வோம் $|2| = 2 \neq 0$

$\therefore \rho(A) = 1$

(ii) $\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 4 & -7 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 4 & -7 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} \text{ என்க.}$$

A ஒரு 3×2 வரிசை அணி

$\therefore \rho(A) \le (3, 2)$ -ன் மீச்சிறு $= 2$

A -ன் பூச்சியமற்ற சிற்றணிக் கோவைகளின் உச்ச வரிசை 2 ஆகும்.

அது $\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 4 & -7 \end{vmatrix} = 7 - 12 = -5 \neq 0$

$\therefore \rho(A) = 2.$

(iii) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 3 & -6 & -3 & 1 \end{bmatrix}$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 3 & -6 & -3 & 1 \end{bmatrix} \text{ என்க.}$$

A ஒரு (2×4) வரிசை அணி

$\therefore \rho(A) \le (2, 4)$ -ன் மீச்சிறு $= 2$

A-ன் பூச்சியமற்ற சிற்றணிக் கோவைகளின் உச்சவரிசை 2 ஆகும்.

அது $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -6 \end{vmatrix} = -6 + 6 = 0$

மேலும், $\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = -1 + 0 = -1 \neq 0.$

$\therefore \rho(A) = 2.$

(iv) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 4 & -6 \\ 5 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 4 & -6 \\ 5 & 1 & -1 \end{bmatrix} \text{ என்க.}$$

A ஒரு 3×3 வரிசை அணி

$\therefore \rho(A) \le (3, 3)$ - ன் மீச்சிறு $= 3$

A-ன் பூச்சியமற்ற சிற்றணிக் கோவைகளின் உச்சவரிசை 3 ஆகும்.

அது,

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 4 & -6 \\ 5 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 4 & -6 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 2 & -6 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 1 \end{vmatrix}$$

[R_1- ன் மூலம் விரிவுபடுத்தப்பட்டது]

$= 1(-4 + 6) + 2(-2 + 30) + 3(2 - 20)$
$= 1(2) + 2(28) + 3(-18)$
$= 2 + 56 - 54 = 58 - 54 = 4 \neq 0$

$\therefore \rho(A) = 3.$

(v) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 3 \\ 8 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 3 \\ 8 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \text{ என்க.}$$

A ஒரு 3×4 வரிசை அணி

$\therefore \rho(A) \leq (3, 4)$- ன் மீச்சிறு = 3

A-ன் பூச்சியமற்ற சிற்றணிக் கோவைகளின் உச்ச வரிசை 3

அது $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 8 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 0 - 8(4-4) = 0$

[C_1 -ன் மூலம் விரிவுபடுத்தப்பட்டது]

மேலும், $\begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 3 \\ 8 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0 + 0 - 8\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}$

[C_1 -ன் மூலம் விரிவுபடுத்தப்பட்டது]

$= -8(6-4) = -8(2) = -16 \neq 0$

$\therefore \rho(A) = 3$

2. பின்வரும் அணிகளுக்கு ஏறுபடி வடிவத்தைப் பயன்படுத்தி அணித்தரம் காண்க :

(i) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 3 & 4 \\ 5 & -1 & 7 & 11 \end{bmatrix}$ **(ii)** $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

(iii) $\begin{bmatrix} 3 & -8 & 5 & 2 \\ 2 & -5 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & 3 & -2 \end{bmatrix}$

தீர்வு : (i) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 3 & 4 \\ 5 & -1 & 7 & 11 \end{bmatrix}$ **[பிடிஎ - 1]**

$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 3 & 4 \\ 5 & -1 & 7 & 11 \end{bmatrix}$ என்க

$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 3 & 4 \\ 5 & -1 & 7 & 11 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 \to R_2 - 2R_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & 1 & -2 \\ 5 & -1 & 7 & 11 \end{bmatrix}$

$\xrightarrow{R_3 \to R_3 - 5R_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & 1 & -2 \\ 0 & -6 & 2 & -4 \end{bmatrix}$

$\xrightarrow{R_3 \to R_3 - 2R_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

கடைசி சமான அணியானது நிரை ஏறுபடி வடிவத்தில் அமைந்துள்ளது. இரண்டு அபூச்சிய நிரைகளை உடையது.

$\therefore \rho(A) = 2.$

(ii) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ என்க.

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_4 \to R_4 - R_1]{R_2 \to R_2 - 3R_1,\ R_3 \to R_3 - R_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -7 & 5 \\ 0 & -4 & 4 \\ 0 & -3 & 2 \end{bmatrix}$

$\xrightarrow{R_3 \to R_3 \div 4} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -7 & 5 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 2 \end{bmatrix}$

$\xrightarrow{R_4 \to R_4 - 3R_3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -7 & 5 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

$\xrightarrow{R_3 \to 7R_3 - R_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -7 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

$\xrightarrow{R_4 \to 2R_4 - R_3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -7 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

கடைசி சமான அணியானது நிரை ஏறுபடி வடிவத்தில் அமைந்துள்ளது. மூன்று அபூச்சிய நிரைகளை உடையது.

$\therefore \rho(A) = 3$

(iii) $\begin{bmatrix} 3 & -8 & 5 & 2 \\ 2 & -5 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & 3 & -2 \end{bmatrix}$

Let $A = \begin{bmatrix} 3 & -8 & 5 & 2 \\ 2 & -5 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & 3 & -2 \end{bmatrix}$

$A \xrightarrow{R_3 \leftrightarrow R_1} \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 & -2 \\ 2 & -5 & 1 & 4 \\ 3 & -8 & 5 & 2 \end{bmatrix}$

$$\xrightarrow[R_3 \to R_3+3R_1]{R_2 \to R_2+2R_1} \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 7 & 0 \\ 0 & -2 & 14 & -4 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3 \to R_3 \div 2} \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 7 & 0 \\ 0 & -1 & 7 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3 \to R_3 - R_2} \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

கடைசி சமான அணியானது நிரை ஏறுபடி வடிவில் அமைந்துள்ளது. மூன்று அப்பூச்சிய நிரைகளை உடையது.

$\therefore \rho(A) = 3$

3. பின்வரும் அணிகளுக்கு காஸ்-ஜோர்டன் நீக்கல் முறையைப் பயன்படுத்தி நேர்மாறு காண்க:

(i) $\begin{bmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{5} & \mathbf{-2} \end{bmatrix}$ **[அ.மா.வி - 2019]** **(ii)** $\begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{6} & \mathbf{-2} & \mathbf{-3} \end{bmatrix}$

(iii) $\begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} \\ \mathbf{2} & \mathbf{5} & \mathbf{3} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{8} \end{bmatrix}$

தீர்வு : **(i)** $\begin{bmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{5} & \mathbf{-2} \end{bmatrix}$

$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$ என்க.

காஸ்-ஜோர்டன் முறையை பயன்படுத்த கிடைப்பது

$$[A|I_2] = \left[\begin{array}{cc|cc} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 5 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_1 \to R_1 \div 2} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 5 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_2 \to R_2 - 5R_1} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{5}{2} & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_2 \to R_2 \times 2} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_1 \to R_1 + \frac{1}{2}R_2} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -5 & 2 \end{array}\right]$$

$$\therefore A^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$$

(ii) $\begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{6} & \mathbf{-2} & \mathbf{-3} \end{bmatrix}$

$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 6 & -2 & -3 \end{bmatrix}$ என்க.

காஸ்-ஜோர்டன் முறையை பயன்படுத்த கிடைப்பது

$$[A|I_3] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & -2 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_2 \to R_2 - R_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 6 & -2 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_3 \to R_3 - 6R_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -3 & -6 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_3 \to R_3 - 4R_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -4 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_1 \to R_1 + R_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -4 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_1 \to R_1 + R_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -4 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_2 \to R_2 + R_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -4 & 1 \end{array}\right]$$

ஆகையால், $A^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & -3 & 1 \\ -3 & -3 & 1 \\ -2 & -4 & 1 \end{bmatrix}$ என அறிவோம்.

(iii) $\begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} \\ \mathbf{2} & \mathbf{5} & \mathbf{3} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{8} \end{bmatrix}$

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix}$ என்க.

காஸ்-ஜோர்டன் முறையை பயன்படுத்த கிடைப்பது

$$[A|I_3] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[R_3 \to R_3 - R_1]{R_2 \to R_2 - 2R_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_1 \to R_1 + R_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 8 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_3 \to R_3 + 2R_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 8 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -5 & 2 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_2 \to R_2 - 3R_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 8 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & -5 & 2 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_1 \to R_1 + 8R_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -40 & 16 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & -5 & 2 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_3 \to R_3 \times (-1)} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -40 & 16 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array}\right]$$

ஆகையால் $A^{-1} = \begin{bmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix}$ என அறிவோம்.

பயிற்சி 1.3

1. பின்வரும் நேரியச் சமன்பாட்டுத் தொகுப்புகளை நேர்மாறு அணி காணல் முறையில் தீர்க்க:

(i) $2x + 5y = -2,\ x + 2y = -3$

(ii) $2x - y = 8,\ 3x + 2y = -2$ **[பிடிஏ - 3]**

(iii) $2x + 3y - z = 9,\ x + y + z = 9,\ 3x - y - z = -1$

(iv) $x + y + z - 2 = 0,\ 6x - 4y + 5z - 31 = 0,\ 5x + 2y + 2z = 13.$

தீர்வு : **(i)** $2x + 5y = -2,\ x + 2y = -3$

தொகுப்பின் அணி வடிவம்

$$= \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ AX = B இங்கு

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix},$$

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow X = A^{-1}B$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 5 = -1 \neq 0.$$

$$\therefore A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{ adj } A = \frac{1}{-1}\begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\therefore X = A^{-1}B = \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4-15 \\ -2+6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -11 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$\therefore$ தீர்வுகணம் $\{-11, 4\}$.

(ii) $2x - y = 8,\ 3x + 2y = -2$

தொகையின் அணி வடிவம்

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ AX = B இங்கு $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$,

$$B = \begin{bmatrix} 8 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow X = A^{-1}B.$$

இப்பொழுது, $|A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 4 + 3 = 7$

$$\therefore A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{ adj } A$$

$$= \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\therefore X = A^{-1}B = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 8 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 16-2 \\ -24-4 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 14 \\ -28 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{14}{7} \\ \frac{-28}{7} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \end{bmatrix}$$

$$\therefore x = 2, y = -4$$

எனவே, தீர்வுகணம் $\{2, -4\}$

(iii) $2x + 3y - z = 9,\ x + y + z = 9,\ 3x - y - z = -1.$

தொகுப்பின் அணி வடிவம்

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 9 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ AX = B இங்கு $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \end{bmatrix}$,

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \text{ மற்றும் } B = \begin{bmatrix} 9 \\ 9 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad X = A^{-1}B$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}$$

[R_1 மூலம் விரிவுபடுத்தப்பட்டது]

$= 2(-1+1) - 3(-1-3) - 1(-1-3)$

$= 0 - 3(-4) = 12 + 4 = 16.$

$$\text{adj } A = \begin{bmatrix} +\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \end{bmatrix}^T$$

$$= \begin{bmatrix} +(-1+1) & -(-1-3) & +(-1-3) \\ -(-3-1) & +(-2+3) & -(-2-9) \\ +(3+1) & -(2+1) & +(2-3) \end{bmatrix}^T$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 4 & -4 \\ 4 & 1 & 11 \\ 4 & -3 & -1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 4 \\ 4 & 1 & -3 \\ -4 & 11 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{ adj } A = \frac{1}{16}\begin{bmatrix} 0 & 4 & 4 \\ 4 & 1 & -3 \\ -4 & 11 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore X = A^{-1}B = \frac{1}{16}\begin{bmatrix} 0 & 4 & 4 \\ 4 & 1 & -3 \\ -4 & 11 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 9 \\ 9 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{16}\begin{bmatrix} 0+36-4 \\ 36+9+3 \\ -36+99+1 \end{bmatrix} = \frac{1}{16}\begin{bmatrix} 32 \\ 48 \\ 64 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$\therefore x = 2, y = 3, z = 4$

$\therefore$ தீர்வு கணம் $\{2, 3, 4\}$

(iv) $\boldsymbol{x + y + z - 2 = 0, 6x - 4y + 5z - 31 = 0, 5x + 2y + 2z = 13}$

தொகையின் அணி வடிவம்

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 6 & -4 & 5 \\ 5 & 2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 31 \\ 13 \end{bmatrix}$$

$$AX = B \text{ இங்கு } A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 6 & -4 & 5 \\ 5 & 2 & 2 \end{bmatrix},$$

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 \\ 31 \\ 13 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad X = A^{-1}B$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 6 & -4 & 5 \\ 5 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} -4 & 5 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 6 & 5 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 6 & -4 \\ 5 & 2 \end{vmatrix}$$

$= 1(-8-10) - 1(12-25) + 1(12+20)$

$= 1(-18) - 1(-13) + 1(22) = -18 + 13 + 32 = 27$

$$\text{adj } A = \begin{bmatrix} +\begin{vmatrix} -4 & 5 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 6 & 5 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 6 & -4 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -4 & 5 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 6 & 5 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 6 & -4 \end{vmatrix} \end{bmatrix}^T$$

$$= \begin{bmatrix} +(-8-10) & -(12-25) & +(12+20) \\ -(2-2) & +(2-5) & -(2-5) \\ +(5+4) & -(5-6) & +(-4-6) \end{bmatrix}^T$$

$$= \begin{bmatrix} -18 & 13 & 32 \\ 0 & -3 & 3 \\ 9 & 1 & -10 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} -18 & 0 & 9 \\ 13 & -3 & 1 \\ 32 & 3 & -10 \end{bmatrix}$$

$$\therefore A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{ adj } A = \frac{1}{27}\begin{bmatrix} -18 & 0 & 9 \\ 13 & -3 & 1 \\ 32 & 3 & -10 \end{bmatrix}$$

$$\therefore X = A^{-1}B$$

$$= \frac{1}{27}\begin{bmatrix} -18 & 0 & 9 \\ 13 & -3 & 1 \\ 32 & 3 & -10 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 31 \\ 13 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{27}\begin{bmatrix} -36 & +0 & +117 \\ 26 & -93 & +13 \\ 64 & +93 & -130 \end{bmatrix} = \frac{1}{27}\begin{bmatrix} 81 \\ -54 \\ 27 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\therefore x = 3, y = -2, z = 1$

$\therefore$ தீர்வு கணம் $\{3, -2, 1\}$

2. $A = \begin{bmatrix} -5 & 1 & 3 \\ 7 & 1 & -5 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ **மற்றும்** $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$, **எனில் பெருக்கற்பலன் AB மற்றும் BA காண்க. இதன் மூலம் $x + y + 2z = 1$, $3x + 2y + z = 7$, $2x + y + 3z = 2$ என்ற நேரியச் சமன்பாட்டுத் தொகுப்பைத் தீர்க்கவும்.**

தீர்வு : கொடுக்கப்பட்ட $A = \begin{bmatrix} -5 & 1 & 3 \\ 7 & 1 & -5 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$,

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} -5 & 1 & 3 \\ 7 & 1 & -5 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -5+3+6 & -5+2+3 & -10+1+9 \\ 7+3-10 & 7+2-5 & 14+1-15 \\ 1-3+2 & 1-2+1 & 2-1+3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} = 4.\ I_3$$

$$BA = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -5 & 1 & 3 \\ 7 & 1 & -5 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -5+7+2 & 1+1-2 & 3-5+2 \\ -15+14+1 & 3+2-1 & 9-10+1 \\ -10+7+3 & 2+1-3 & 6-5+3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} = 4.\ I_3.$$

ஆகையால் $AB = BA = 4.\ I_3$ என அறிவோம்.

$$\Rightarrow \quad \left(\frac{1}{4}A\right) B = B\left(\frac{1}{4}A\right) = I$$

$$\Rightarrow \quad B^{-1} = \frac{1}{4} = I$$

கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாடு தொகுப்பை அணி வடிவில் எழுத கிடைப்பது,

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad B\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = B^{-1}\begin{bmatrix} 1 \\ 7 \\ 2 \end{bmatrix} = \left[\frac{1}{4}A\right]\begin{bmatrix} 1 \\ 7 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{4}\begin{bmatrix} -5 & 1 & 3 \\ 7 & 1 & -5 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 7 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{4}\begin{bmatrix} -5+7+6 \\ 7+7-10 \\ 1-7+2 \end{bmatrix} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 8 \\ 4 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$\therefore x = 2, y = 1, z = -1$

எனவே தீர்வு கணம் $\{2, 1, -1\}$.

3. ஒருவர் ஒரு குறிப்பிட்ட மாத ஊதியத்தில் ஒரு பணியில் அமர்த்தப்படுகிறார். ஒவ்வொரு ஆண்டும் ஒரு நிலையான ஊதிய உயர்வு அவருக்கு வழங்கப்படுகிறது. 3 ஆண்டுகளுக்குப் பிறகு அவர் பெறும் ஊதியம் ₹ 19,800 மற்றும் 9 ஆண்டுகளுக்குப் பிறகு அவர் பெறும் ஊதியம் ₹23,400 எனில் அவருடைய ஆரம்ப ஊதியம் மற்றும் ஆண்டு உயர்வு எவ்வளவு என்பதைக் காண்க. (நேர்மாறு அணி காணல் முறையில் இக்கணக்கைத் தீர்க்க.)

தீர்வு : அவருடைய ஆரம்ப ஊதியம் ₹ x என்க மற்றும் ஆண்டு உயர்வு ₹ y என்க.

கொடுக்கப்பட்ட தரவின்படி $x + 3y = 19800$ மற்றும் $x + 9y = 23400$.

கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாடு தொகுப்பின் அணி வடிவம்

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 9 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19800 \\ 23400 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow AX = B$ இங்கு $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 9 \end{bmatrix}$ மற்றும்

$$B = \begin{bmatrix} 19800 \\ 23400 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad X = A^{-1} B$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 9 \end{vmatrix} = 9 - 3 = 6 \neq 0$$

$$\therefore A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{adj} A = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 9 & -3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore X = A^{-1} B$$

$$= \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 9 & -3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 19800 \\ 23400 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 178200 & -70200 \\ -19800 & +23400 \end{bmatrix} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 108000 \\ 3600 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 18000 \\ 600 \end{bmatrix}$$

$$\therefore x = 18000, y = 600.$$

எனவே அவருடைய ஆரம்ப ஊதியம் ₹ 18000 மற்றும் ஆண்டு உயர்வு ₹ 600.

4. 4 ஆடவரும் 4 மகளிரும் சேர்ந்து ஒரு குறிப்பிட்ட வேலையை 3 நாட்களில் செய்து முடிப்பார்கள். அதே வேலையை 2 ஆடவரும் 5 மகளிரும் சேர்ந்து 4 நாட்களில் முடிப்பார்கள். எனில் அவ்வேலையை ஓர் ஆடவர் மற்றும் ஒரு மகளிர் தனித்தனியாக செய்து முடிப்பதற்கு எத்தனை நாட்களாகும் என்பதை நேர்மாறு அணி காணல் முறையில் தீர்க்க.

தீர்வு : ஒரு ஆடவர் தனியாக செய்து முடிப்பதற்கு x நாட்கள் மற்றும் மகளிர் தனியாக செய்து முடிப்பதற்கு y நாட்கள் ஆகும்.

∴ கொடுக்கப்பட்ட தரவின்படி,

$$\frac{4}{x}+\frac{4}{y} = \frac{1}{3} \text{ மற்றும் } \frac{2}{x}+\frac{5}{y} = \frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{x} = s \text{ மற்றும் }$$

$$\frac{1}{y} = t \text{ என பிரதியிடு}$$

$$\therefore 4s + 4t = \frac{1}{3}$$

$$\text{மற்றும் } 2s + 5t = \frac{1}{4}$$

கொடுக்கப்பட்ட தொகுப்பின் அணி வடிவம்

$$\begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} s \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{4} \end{bmatrix} \Rightarrow AX = B \text{ இங்கு}$$

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \text{ மற்றும் } B = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{4} \end{bmatrix}$$

$$X = A^{-1} B$$

$$\text{இங்கு } |A| = \begin{vmatrix} 4 & 4 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 20 - 8 = 12 \neq 0$$

$$\therefore A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{ adj } A = \frac{1}{12}\begin{bmatrix} 5 & -4 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\therefore X = A^{-1} B = \frac{1}{12}\begin{bmatrix} 5 & -4 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{12}\begin{bmatrix} \frac{5}{3} & -1 \\ \frac{-2}{3} & +1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{12}\begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3}\times\frac{1}{12} \\ \frac{1}{3}\times\frac{1}{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{18} \\ \frac{1}{36} \end{bmatrix}$$

$$\therefore s = \frac{1}{18} \Rightarrow \frac{1}{x} = \frac{1}{18} \Rightarrow x = 18$$

$$t = \frac{1}{36} \Rightarrow \frac{1}{y} = \frac{1}{36} \Rightarrow y = 36.$$

ஆகையால் ஓர் ஆடவர் தனியாக செய்து முடிப்பதற்கு 18 நாட்கள் மற்றும் ஒரு மகளிர் தனியாக செய்து முடிப்பதற்கு 36 நாட்கள் ஆகும்.

5. A, B மற்றும் C என்ற பொருட்களின் விலை ஓர் அலகிற்கு முறையே ₹ x, y, மற்றும் z ஆகும். P என்பவர் B-ல் 4 அலகுகள் வாங்கி, A-ல் 2 அலகையும் C-ல் 5 அலகையும் விற்கிறார். Q என்பவர் C-ல் 2 அலகுகள் வாங்கி A-ல் 3 அலகுகள் மற்றும் B-ல் 1 அலகையும் விற்கிறார். R என்பவர் A-ல் 1 அலகை வாங்கி, B-ல் 3 அலகையும் C அலகில் ஒரு அலகையும் விற்கிறார். இவ்வணிகத்தில் P, Q மற்றும் R முறையே ₹ 15,000, ₹ 1,000 மற்றும் ₹ 4,000 வருமானம் ஈட்டுகின்றனர் எனில் A, B மற்றும் C பொருட்களின் ஓரலகு விலை எவ்வளவு என்பதைக் காண்க. (நேர்மாறு அணி காணல் முறையில் இக்கணக்கைத் தீர்க்க.)

தீர்வு : A, B மற்றும் C பொருட்களின் ஒரலகு விலை ₹ x, ₹ y மற்றும் ₹ z என்க.

கொடுக்கப்பட்ட தரவின்படி,

$$2x - 4y + 5z = 15000$$
$$3x + y - 2z = 1000$$
$$-x + 3y + z = 4000$$

சமன்பாடுகளின் தொகுப்பின் அணி வடிவம்

$$\begin{bmatrix} 2 & -4 & 5 \\ 3 & 1 & -2 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15000 \\ 1000 \\ 4000 \end{bmatrix}$$

AX = B இங்கு $A = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 5 \\ 3 & 1 & -2 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$,

மற்றும் $B = \begin{bmatrix} 15000 \\ 1000 \\ 4000 \end{bmatrix} \Rightarrow X = A^{-1} B$

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 5 \\ 3 & 1 & -2 \\ -1 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 2\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}$$

$= 2 (1 + 6) + 4 (3 - 2) + 5 (9 + 1)$

$= 2 (7) + 4 (1) + 5(10) = 14 + 4 + 50 = 68.$

$$\text{adj } A = \begin{bmatrix} +\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} -4 & 5 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} -4 & 5 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \end{bmatrix}^T$$

$$= \begin{bmatrix} +(1+6) & -(3-2) & +(9+1) \\ -(-4-15) & +(2+5) & -(6-4) \\ +(8-5) & -(-4-15) & +(2+12) \end{bmatrix}^T$$

$$= \begin{bmatrix} 7 & -1 & 10 \\ 19 & 7 & -2 \\ 3 & 19 & 14 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 7 & 19 & 3 \\ -1 & 7 & 19 \\ 10 & -2 & 14 \end{bmatrix}$$

$$\therefore A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{adj } A = \frac{1}{68}\begin{bmatrix} 7 & 19 & 3 \\ -1 & 7 & 19 \\ 10 & -2 & 14 \end{bmatrix}$$

$$\therefore X = A^{-1} B = \frac{1}{68}\begin{bmatrix} 7 & 19 & 3 \\ -1 & 7 & 19 \\ 10 & -2 & 14 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 15000 \\ 1000 \\ 4000 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{68}\begin{bmatrix} 105000+19000+12000 \\ -15000+7000+76000 \\ 150000-2000+56000 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{68}\begin{bmatrix} 136000 \\ 68000 \\ 204000 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2000 \\ 1000 \\ 3000 \end{bmatrix}$$

$\therefore x = 2000, y = 1000, z = 3000.$

A, B மற்றும் C பொருட்களின் ஓரலகு விலைகள் முறையே ₹ 2000, ₹ 1000 மற்றும் ₹ 3000 ஆகும்.

பயிற்சி 1.4

1. பின்வரும் நேரியச் சமன்பாடுகளின் தொகுப்பை கிராமரின் விதிப்படி தீர்க்க:

(i) $5x - 2y + 16 = 0,\ x + 3y - 7 = 0$

(ii) $\dfrac{3}{x} + 2y = 12,\ \dfrac{2}{x} + 3y = 13$

(iii) $3x + 3y - z = 11, 2x - y + 2z = 9,$ $4x + 3y + 2z = 25$ **[Hy - 2019]**

(iv) $\dfrac{3}{x} - \dfrac{4}{y} - \dfrac{2}{z} - 1 = 0, \dfrac{1}{x} + \dfrac{2}{y} + \dfrac{1}{z} - 2 = 0,$ $\dfrac{2}{x} - \dfrac{5}{y} - \dfrac{4}{z} + 1 = 0$

தீர்வு : (i) $5x - 2y = -16, x + 3y = 7$

கொடுக்கப்பட்ட $\Delta = \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 15 + 2 = 17$

$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -16 & -2 \\ 7 & 3 \end{vmatrix} = -48 + 14 = -34$

$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 5 & -16 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} = 35 + 16 = 51$

$\therefore x = \dfrac{\Delta_1}{\Delta} = \dfrac{-34}{17} = -2$

$y = \dfrac{\Delta_2}{\Delta} = \dfrac{51}{17} = 3$

$\therefore$ தீர்வுக் கணம் $\{-2, 3\}$

(ii) $\dfrac{3}{x} + 2y = 12,\ \dfrac{2}{x} + 3y = 13$

$\dfrac{1}{x} = z$ என்க

$\therefore 3z + 2y = 12, 2z + 3z = 13$

$\therefore \Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 9 - 4 = 5$

$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 12 & 2 \\ 13 & 3 \end{vmatrix} = 36 - 26 = 10$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 12 \\ 2 & 13 \end{vmatrix} = 39 - 24 = 15$$

$$\therefore z = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{10}{5} = 2 \Rightarrow \frac{1}{x} = 2 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

$$y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{15}{5} = 3$$

$\therefore$ தீர்வு கணம் $\{\frac{1}{2}, 3\}$

(iii) $\mathbf{3x + 3y - z = 11, 2x - y + 2z = 9,}$
$\mathbf{4x + 3y + 2z = 25}$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 3\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 3(-2-6) - 3(4-8) - 1(6+4)$$

$$= 3(-8) - 3(-4) - 1(10)$$

$$= -24 + 12 - 10 = -22$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 11 & 3 & -1 \\ 9 & -1 & 2 \\ 25 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 11\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 9 & 2 \\ 25 & 2 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 9 & -1 \\ 25 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 11(-2-6) - 3(18-50) - 1(27+25)$$

$$= 11(-8) - 3(-32) - 1(52)$$

$$= -88 + 96 - 52 = -44$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 11 & -1 \\ 2 & 9 & 2 \\ 4 & 25 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 3\begin{vmatrix} 9 & 2 \\ 25 & 2 \end{vmatrix} - 11\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 2 & 9 \\ 4 & 25 \end{vmatrix}$$

$$= 3(18-50) - 11(4-8) - 1(50-36)$$

$$= 3(-32) - 11(-4) - 1(14)$$

$$= -96 + 44 - 14 = -66$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 3 & 3 & 11 \\ 2 & -1 & 9 \\ 4 & 3 & 25 \end{vmatrix}$$

$$= 3\begin{vmatrix} -1 & 9 \\ 3 & 25 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 2 & 9 \\ 4 & 25 \end{vmatrix} + 11\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 3(-25-27) - 3(50-36) + 11(6+4)$$

$$= 3(-52) - 3(14) + 11(10)$$

$$= -156 - 42 + 110 = -88$$

$$\therefore x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-44}{-22} = 2$$

$$y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-66}{-22} = 3$$

$$z = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-88}{-22} = 4$$

$\therefore$ தீர்வு கணம் $\{2, 3, 4\}$

(iv) $\mathbf{\frac{3}{x} - \frac{4}{y} - \frac{2}{z} - 1 = 0, \frac{1}{x} + \frac{2}{y} + \frac{1}{z} - 2 = 0,}$

$\mathbf{\frac{2}{x} - \frac{5}{y} - \frac{4}{z} + 1 = 0}$

$\frac{1}{x} = u, \frac{1}{y} = v, \frac{1}{z} = w$, என பிரதியிடு

நமக்கு கிடைப்பது $3u - 4v - 2w = 1, u + 2v + w = 2,$
$2u - 5v - 4w = -1$

$$\therefore \Delta = \begin{vmatrix} 3 & -4 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -5 & -4 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -5 & -4 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -5 \end{vmatrix}$$

$$= 3(-8+5) + 4(-4-2) - 2(-5-4)$$

$$= 3(-3) + 4(-6) - 2(-9)$$

$$= -9 - 24 + 18 = -15$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & -4 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \\ -1 & -5 & -4 \end{vmatrix}$$

$$= 1\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -5 & -4 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -4 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -5 \end{vmatrix}$$

$$= 1(-8+5) + 4(-8+1) - 2(-10+2)$$

$$= 1(-3) + 4(-7) - 2(-8)$$

$$= -3 - 28 + 16 = -15$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -4 \end{vmatrix}$$

$$= 3\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -4 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= 3(-8+1) - 1(-4-2) - 2(-1-4)$$

$$= 3(-7) - 1(-6) - 2(-5)$$

$$= -21 + 6 + 10 = -5$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 3 & -4 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & -5 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= 3\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -5 & -1 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -5 \end{vmatrix}$$

$= 3(-2 + 10) + 4(-1 - 4) + 1(-5 - 4)$

$= 3(8) + 4(-5) + 1(-9)$

$= 24 - 20 - 9 = -5$

$$\therefore u = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-15}{-15} = 1 \Rightarrow \frac{1}{x} = 1 \Rightarrow x = 1$$

$$v = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-5}{-15} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{1}{y} = \frac{1}{3} \Rightarrow y = 3$$

$$w = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-5}{-15} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{1}{z} = \frac{1}{3} \Rightarrow z = 3$$

$\therefore$ தீர்வு கணம் $\{1, 3, 3\}$

2. ஒரு போட்டித் தேர்வில் ஒவ்வொரு சரியான விடைக்கும் ஒரு மதிப்பெண் வழங்கப்படுகிறது. ஒவ்வொரு தவறான விடைக்கும் $\frac{1}{4}$ மதிப்பெண் குறைக்கப்படுகிறது. ஒரு மாணவர் 100 கேள்விகளுக்குப் பதிலளித்து 80 மதிப்பெண்கள் பெறுகிறார் எனில் அவர் எத்தனை கேள்விகளுக்குச் சரியாக பதில் அளித்திருப்பார்? (கிராமரின் விதியைப் பயன்படுத்தி இக்கணக்கைத் தீர்க்கவும்).

[Qy- 2019]

தீர்வு : x கேள்விகளுக்கு சரியாக பதில் அளித்திருப்பார் மற்றும் y கேள்விகளுக்கு தவறான பதில் அளித்திருப்பார் என்க.

கொடுக்கப்பட்ட தரவின்படி, $x + y = 100$ மற்றும்

$$1.x - \frac{1}{4}y = 80 \quad \ldots (1)$$

4 ஆல் பெருக்க கிடைப்பது,

$$4x - y = 320 \quad \ldots (2)$$

(1) மற்றும் (2) லிருந்து

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 4 = -5$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 100 & 1 \\ 320 & -1 \end{vmatrix} = -100 - 320 = -420$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 100 \\ 4 & 320 \end{vmatrix} = 320 - 400 = -80$$

$$\therefore x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-420}{-5} = +84$$

$$\text{மற்றும் } y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-80}{-5} = 16$$

$\therefore$ 84 கேள்விகளுக்குச் சரியான பதில் அளித்திருப்பார்.

3. வேதியாளர் ஒருவரிடம் 50% அமிலத்தன்மை கொண்ட ஒரு கரைசலும் மற்றும் 25% அமிலத்தன்மை கொண்ட மற்றொரு கரைசலும் உள்ளது. அவர் 10 லிட்டர் கரைசலில் 40% அமிலத்தன்மை உள்ளவாறு ஒரு கரைசலை உருவாக்க இருவகைக் கரைசல்கள் ஒவ்வொன்றிலிருந்தும் எத்தனை லிட்டர் சேர்க்க வேண்டும்? (இக்கணக்கை கிராமரின் விதியைப் பயன்படுத்தித் தீர்க்க).

தீர்வு : 50% அமிலத்தன்மை கரைசலிலிருந்து x லிட்டர் மற்றும் 25% அமிலத்தன்மை கரைசலிலிருந்து y லிட்டர் சேர்க்க வேண்டும் என்க.

கொடுக்கப்பட்ட தரவின்படி, $x + y = 10 \quad \ldots (1)$

$$\text{மற்றும் } x\left(\frac{50}{100}\right) + y\left(\frac{25}{100}\right) = 10\left(\frac{40}{100}\right)$$

$$\Rightarrow \quad 50x + 25y = 400 \Rightarrow 2x + y = 16 \quad \ldots (2)$$

சமன்பாட்டுத் தொகுப்பின் அணி வடிவம்

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 16 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow AX = B \text{ இங்கு } A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix},$$

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 10 \\ 16 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad X = A^{-1}B \quad |A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 2 = -1$$

$$\Rightarrow \quad X = \frac{1}{|A|} \text{adj } A.B$$

$$\Rightarrow \quad X = -1\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 10 \\ 16 \end{bmatrix}$$

$$= -\begin{bmatrix} 10 - 16 \\ -20 + 16 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad X = -\begin{bmatrix} -6 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \end{bmatrix}$$

50% அமிலத்தன்மை கரைசலிலிருந்து 6 லிட்டர் மற்றும் 25% அமிலத்தன்மை கரைசலிலிருந்து 4 லிட்டர் சேர்க்க வேண்டும்.

4. ஒரு மீன் தொட்டியை பம்பு A மற்றும் பம்பு B என்பன ஒன்றாகச் சேர்ந்து 10 நிமிடங்களில் நீரை நிரப்பும். பம்பு B ஆனது நீரை உள்ளே அல்லது வெளியே ஒரே வேகத்தில் அனுப்ப இயலும். எதிர்பாராதவிதமாக பம்பு B ஆனது நீரை வெரை வெளியே அனுப்பினால் தொட்டி நிரம்ப 30 நிமிடங்கள் ஆகும் எனில் ஒவ்வொரு பம்பும் தொட்டியை தனித்தனியாக நிரப்ப எவ்வளவு காலம் எடுத்துக் கொள்ளும்? (கிராமரின் விதியைப் பயன்படுத்தி தீர்க்கவும்).

தீர்வு : பம்பு A தொட்டியை நிரப்ப x நிமிடங்கள் எடுத்துக் கொள்ளும் மற்றும் பம்பு B தொட்டியை நிரப்ப y நிமிடங்கள் எடுத்து கொள்ளும் என்க.

1 நிமிடததில் Aஆல் $\frac{1}{x}$ அலகும் மற்றும் B ஆல் $\frac{1}{y}$ அலகும் நிரப்ப முடியும்.

$$\therefore \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 10$$

மற்றும் $\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = 30$

$\frac{1}{x} = a$ மற்றும் $\frac{1}{y} = b$ என பிரதியிட

$$\Rightarrow \quad a + b = \frac{1}{10} \quad \text{... (1)}$$

மற்றும் $a - b = \frac{1}{30}$ ... (2)

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1-1 = -2$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} \frac{1}{10} & 1 \\ \frac{1}{30} & -1 \end{vmatrix} = \frac{-1}{10} - \frac{1}{30} = \frac{-3-1}{30} = \frac{-4}{30} = \frac{-2}{15}$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{10} \\ 1 & \frac{1}{30} \end{vmatrix} = \frac{1}{30} - \frac{1}{10} = \frac{1-3}{30}$$

$$= \frac{-2}{30} = \frac{-1}{15}$$

$$\therefore a = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{\frac{-2}{15}}{-2} = \frac{1}{15} \Rightarrow \frac{1}{x} = \frac{1}{15} \Rightarrow x = 15$$

$$b = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{\frac{-1}{15}}{-2} = \frac{1}{30} \Rightarrow \frac{1}{y} = \frac{1}{30} \Rightarrow y = 30$$

A 15 நிமிடங்களிலும், B 30 நிமிடங்களிலும் தொட்டியை நிரப்பும்.

5. ஒரு குடும்பத்திலுள்ள மூன்று நபர்கள் இரவு உணவு சாப்பிட ஓர் உணவகத்திற்குச் சென்றனர். இரு தோசைகள், மூன்று இட்லிகள் மற்றும் இரு வடைகளின் விலை ₹150. இரு தோசைகள், இரு இட்லிகள் மற்றும் நான்கு வடைகளின் விலை ₹ 200. ஐந்து தோசைகள், நான்கு இட்லிகள் மற்றும் இரண்டு வடைகளின் விலை ₹ 250. அக்குடும்பத்தினரிடம் ₹ 350 இருந்தது மற்றும் அவர்கள் மூன்று தோசைகள், ஆறு இட்லிகள் மற்றும் ஆறு வடைகள் சாப்பிட்டனர். அக்குடும்பத்தினர் சாப்பிட்ட செலவிற்கான தொகையை அவர்களிடமிருந்த பணத்தைக் கொண்டு செலுத்த முடியுமா? (உமது விடையை கிராமரின் விதிக்கொண்டு நிருபி)?

தீர்வு : ஒரு தோசையின் விலை ₹ x என்க.

ஒரு இட்லியின் விலை ₹ y என்க.

ஒரு வடையின் விலை ₹ z என்க.

கொடுக்கப்பட்ட தரவின்படி,

$$2x + 3y + 2z = 150$$
$$2x + 2y + 4z = 200$$
$$5x + 4y + 2z = 250$$

$$\therefore \Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \\ 5 & 4 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 2\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= 2(4-16) - 3(4-20) + 2(8-10)$$

$$= 2(-12) - 3(-16) + 2(-2)$$

$$= -24 + 48 - 4 = 20$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 150 & 3 & 2 \\ 200 & 2 & 4 \\ 250 & 4 & 2 \end{vmatrix}$$

C_3 லிருந்து 50ஐ பொதுவில் எடுக்க கிடைப்பது,

$$= 100\begin{vmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 2 \\ 5 & 4 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 100\left[3\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix}\right]$$

$$= 100[3(2-8) - 3(4-10) + 1(16-10)]$$

$$= 100[3(-6) - 3(-6) + 6]$$

$$= 100[-18 + 18 + 6] = 600.$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 150 & 2 \\ 2 & 200 & 4 \\ 5 & 250 & 2 \end{vmatrix} = 100 \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 5 & 5 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 100 \left[2\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 5 \end{vmatrix} \right]$$

$= 100[2(4 - 10) - 3(2 - 10) + 1(10 - 20)]$

$= 100[2(-6) - 3(-8) + 1(-10)]$

$= 100[-12 + 24 - 10] = 100\,[2] = 200.$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 150 \\ 2 & 2 & 200 \\ 5 & 4 & 250 \end{vmatrix} = 50 \begin{vmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 4 \\ 5 & 4 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= 50 \left[2\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 5 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} \right]$$

$= 50\,[2(10 - 16) - 3(10 - 20) + 3(8 - 10)]$

$= 50[2(-6) - 3(-10) + 3(-2)]$

$= 50\,[-12 + 30 - 6] = 50\,[12] = 600.$

$$\therefore x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{600}{20} = 30$$

$$y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{200}{20} = 10$$

$$z = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{600}{20} = 30.$$

ஆகையால் ஒரு தோசையின் விலை ₹ 30, ஒரு இட்லியின் விலை ₹ 10 மற்றும் 1 வடையின் விலை ₹ 30.

மேலும் 3 தோசைகள், ஆறு இட்லிகள் மற்றும் 6 வடைகளின் விலை

$= 3x + 6y + 6z = 3(30) + 6(10) + 6(30)$

$= 90 + 60 + 180 =$ ₹ 330

அக்குடும்பத்தினரிடம் ₹ 350 இருப்பதால் சாப்பிட்ட செலவிற்கான தொகையை அவர்களிடமிருந்த பணத்தை கொண்டு செலுத்த முடியும்.

பயிற்சி 1.5

1. பின்வரும் நேரியச் சமன்பாடுகளின் தொகுப்பை காஸ்ஸியன் நீக்கல் முறையில் தீர்க்கவும்:

(i) $2x - 3y + 3z = 2, x + 2y - z = 3, 3x - y + 2z = 1.$

(ii) $2x + 4y + 6z = 22, 3x + 8y + 5z = 27, -x + y + 2z = 2$

தீர்வு : விரிவுபடுத்தப்பட்ட அணியை நிரை - ஏறுபடி வடிவத்திற்கு தொடக்க நிலை நிரை உருமாற்றங்கள் செயல்படுவதன் மூலம் நாம் பெறுவது

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & 3 & 2 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[R_3 \to R_3 - 3R_1]{R_2 \to R_2 - 2R_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -6 & 5 & -4 \\ 0 & -7 & 5 & -8 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_3 \to R_3 - R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -6 & 5 & -4 \\ 0 & -1 & 0 & -4 \end{array}\right] \xrightarrow{R_3 \to 6R_3 - 2R_2}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -6 & 5 & -4 \\ 0 & 0 & -5 & -20 \end{array}\right]$$

ஏறுபடி வடிவத்திலிருந்து கிடைக்கும் சமான சமன்பாடுகள்,

$x + 2y - z = 3 \quad \ldots (1)$

$-6y + 5z = -4 \quad \ldots (2)$

$-5z = -20 \Rightarrow z = \dfrac{-20}{-5} = 4.$

$z = 4$ என 2 ல் பிரதியிட கிடைப்பது,

$-6y + 5(4) = -4$

$\Rightarrow -6y + 20 = -4 \Rightarrow -4 - 20 = -24$

$\Rightarrow y = \dfrac{-24}{-6} = 4.$

$y = z = 4$ என (1) ல் பிரதியிட கிடைப்பது

$x + 2(4) - 4 = 3$

$\Rightarrow x + 8 - 4 = 3$

$\Rightarrow x + 4 = 3$

$\Rightarrow x = 3 - 4 = -1.$

$\therefore$ தீர்வு கணம் $\{-1, 4, 4\}$

(ii) $2x + 4y + 6z = 22, 3x + 8y + 5z = 27, -x + y + 2z = 2$

விரிவுபடுத்தப்பட்ட அணியை ஏறுபடிவ வடிவத்திற்கு தொடக்கநிலை உருமாற்றங்கள் செய்யக் கிடைப்பது

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 6 & 22 \\ 3 & 8 & 5 & 27 \\ -1 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_3} \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 2 & 2 \\ 3 & 8 & 5 & 27 \\ 2 & 4 & 6 & 22 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[R_3 \to R_3 + 2R_1]{R_2 \to R_2 + 3R_1} \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 11 & 11 & 33 \\ 0 & 6 & 10 & 26 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[R_3 \to R_3 \div 2]{R_2 \to R_2 \div 11} \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 5 & 13 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_3 \to R_3 - 3R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_3 \to R_3 \div 2} \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

ஏறுபடி வடிவத்திலிருந்து கிடைக்கும் சமமான சமன்பாடுகளின் தொகுப்பானது,

$$-x + y + 2z = 2 \quad ...(1)$$
$$y + z = 3 \quad ...(2)$$
$$z = 2 \quad ...(3)$$

(3) ஐ (2) ல் பிரதியிட கிடைப்பது $y + 2 = 3$

$\Rightarrow y = 3 - 2 = 1$

$y = 1$ மற்றும் $z = 2$ என (1) ல் பிரதியிட கிடைப்பது

$-x + 1 + 2(2) = 2 \quad \Rightarrow -x + 1 + 4 = 2$

$\Rightarrow \quad -x + 5 = 2 \quad \Rightarrow \quad -x = 2 - 5$

$\Rightarrow \quad -x = -3 \quad \Rightarrow \quad x = 3$

$\therefore$ தீர்வு கணம் $\{3, 1, 2\}$

2. $ax^2 + bx + c$ -ஐ $x + 3$, $x - 5$, மற்றும் $x - 1$-ஆல் வகுக்கும் போது மீதியானது முறையே 21, 61 மற்றும் 9 எனில் a, b மற்றும் c-ஐக் காண்க. (காஸ்ஸியன் நீக்கல் முறையை உபயோகிக்கவும்) [பிடிஏ - 3]

தீர்வு : $P(x) = ax^2 + bx + c$ என்க.

கொடுக்கப்பட்ட $P(-3) = 21$

$[\because P(x) \div x + 3$, மீதி 21]

$\Rightarrow a(-3)^2 + b(-3) + c = 21$

$\Rightarrow 9a - 3b + c = 21 \quad ...(1)$

மேலும், $P(5) = 61$

$\Rightarrow a(5)^2 + b(5) + c = 61$

[மீதி தேற்றத்தை பயன்படுத்தி]

$\Rightarrow 25a + 5b + c = 61 \quad ...(2)$

மற்றும் $P(1) = 9$

$\Rightarrow a(1)^2 + b(1) + c = 9$

$\Rightarrow a + b + c = 9 \quad ...(3)$

விரிவுபடுத்தப்பட்ட அணியை ஏறுபடிவ வடிவத்திற்கு தொடக்கநிலை உருமாற்றங்கள் செய்யக் கிடைப்பது.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 9 & -3 & 1 & 21 \\ 25 & 5 & 1 & 61 \\ -1 & 1 & 1 & 9 \end{array}\right] \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 9 \\ 25 & 5 & 1 & 61 \\ 9 & -3 & 1 & 21 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[R_2 \to R_2 - 25R_1]{R_3 \to R_3 - 9R_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 9 \\ 0 & -20 & -24 & -164 \\ 0 & -12 & -8 & -60 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[R_3 \to R_3 \div 4]{R_2 \to R_2 \div 4} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 9 \\ 0 & -5 & -6 & -41 \\ 0 & -3 & -2 & -15 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_3 \to R_3 - \frac{3}{5}R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 9 \\ 0 & -5 & -6 & -41 \\ 0 & 0 & \frac{8}{5} & \frac{48}{5} \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_3 \to 5R_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 9 \\ 0 & -5 & -6 & -41 \\ 0 & 0 & 8 & 48 \end{array}\right]$$

ஏறுபடிவடிவத்திலிருந்து கிடைக்கும் சமான சமன்பாடுகளின் தொகுப்பானது,

$$a + b + c = 9 \quad ...(1)$$
$$-5b - 6c = -41 \quad ...(2)$$
$$8c = 48$$

$\Rightarrow \quad c = \dfrac{48}{8} = 6$

$c = 6$ என (2) -ல் பிரதியிட கிடைப்பது,

$\Rightarrow \quad -5b - 6(6) = -41$

$\Rightarrow \quad -5b = 36 - 41$

$\Rightarrow \quad -5b = -41 + 36 = -5$

$\Rightarrow \quad b = \dfrac{-5}{-5} = 1$

$b = 1$, $c = 6$ என (1) -ல் பிரதியிட கிடைப்பது,

$a + 1 + 6 = 9$

$\Rightarrow \quad a + 7 = 9$

$\Rightarrow \quad a = 9 - 7$

$\Rightarrow \quad a = 2$

$\therefore a = 2, b = 1,$ மற்றும் $c = 6$

3. ஒரு தொகை ₹ 65,000 ஆண்டிற்கு முறையே 6%, 8% மற்றும் 9% என்ற வட்டி வீதத்தில் மூன்று பத்திரங்களில் முதலீடு செய்யப்படுகிறது. மொத்த ஆண்டு வருமானம் ₹ 4,800. மூன்றாவது பத்திரத்தில் கிடைக்கும் வருமானமானது இரண்டாவது பத்திரத்தில் கிடைக்கும் வருமானத்தை விட ₹ 600 அதிகம் எனில் ஒவ்வொரு பத்திரத்திலும் முதலீடு செய்யப்பட்ட தொகையைக் காண்க.(காஸ் நீக்கல் முறையை பயன்படுத்துக)

தீர்வு : 6%, 8% மற்றும் 9% பத்திரத்தில் முதலீடு செய்யப்படும் தொகை முறையே ₹ x, ₹ y மற்றும் ₹ z என்க.

$\therefore$ கொடுக்கப்பட்ட தரவின்படி, $x + y + z = 65000$ ...(1)

$$\frac{6\times x\times 1}{100}+\frac{8\times y\times 1}{100}+\frac{9\times z\times 1}{100} = 4800$$

$$\left[\because \text{வட்டி} = \frac{PNR}{100}\right]$$

$$\Rightarrow \frac{6x}{100}+\frac{8y}{100}+\frac{9z}{100} = 4800$$

$$\Rightarrow 6x+8y+9z = 480000 \quad ...(2)$$

மேலும், $\frac{9z}{100} = 600 + \frac{8y}{100}$

$$\Rightarrow \frac{-8y}{100}+\frac{9z}{100} = 600$$

$$\Rightarrow -8y+9z = 60000 \quad ...(3)$$

விரிவுபடுத்தப்பட்ட அணியை ஏறுபடிவ வடிவத்திற்கு தொடக்கநிலை உருமாற்றங்கள் செய்யக் கிடைப்பது

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 65000 \\ 6 & 8 & 9 & 480000 \\ 0 & -8 & 9 & 60000 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_2 \to R_2 - 6R_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 65000 \\ 0 & 2 & 3 & 90000 \\ 0 & -8 & 9 & 60000 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_3 \to R_3 + 4R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 65000 \\ 0 & 2 & 3 & 90000 \\ 0 & 0 & 21 & 420000 \end{array}\right]$$

ஏறுபடிவடிவத்திலிருந்து கிடைக்கும் சமான சமன்பாடுகளின் தொகுப்பானது,

$$x+y+z = 65000 \quad ...(1)$$
$$2y+3z = 90000 \quad ...(2)$$
$$21z = 42000$$
$$\Rightarrow z = \frac{420000}{21} = 20000$$

z = 20,000 என (2)ல் பிரதியிட கிடைப்பது,

$$2y + 3(20,000) = 90000$$
$$\Rightarrow 2y + 60,000 = 90,000$$
$$\Rightarrow 2y = 90,000 - 60,000$$
$$= 30,000$$
$$\Rightarrow y = \frac{30,000}{2} = 15,000$$

$y = 15,000$ மற்றும் $z = 20,000$ என (1) ல் பிரதியிட கிடைப்பது,

$$x + 15,000 + 20,000 = 65000$$
$$\Rightarrow x + 35,000 = 65000$$
$$\Rightarrow x = 65,000 - 35,000$$
$$\Rightarrow x = 30,000$$

6% பத்திரத்தின் விலை ₹ 30,000, 8% பத்திரத்தில் ₹ 15,000 மற்றும் 9% பத்திரத்தின் விலை ₹ 20,000.

4. ஒரு சிறுவன் $y = ax^3 + bx + c$ என்ற பாதையில் (–6, 8),(–2 – 12) மற்றும் (3,8). எனும் புள்ளிகள் வழியாக செல்கிறான். P(7,60) என்ற புள்ளியில் உள்ள அவனுடைய நண்பனை சந்திக்க விரும்புகிறான். அவன் அவனுடைய நண்பனை சந்திப்பானா? (காஸ் நீக்கல் முறையை பயன்படுத்துக).

தீர்வு : கொடுக்கப்பட்ட $y = ax^2 + bx + c$ ...(1)

(–6, 8), (1) -ன் மீது அமைந்துள்ளது

$$\Rightarrow 8 = a(-6)^2 + b(-6) + c$$
$$\Rightarrow 8 = 36a - 6b + c \quad ...(2)$$

(–2, –12), (1)-ன் மீது அமைந்துள்ளது

$$\Rightarrow -12 = a(-2)^2 + b(-2) + c$$
$$\Rightarrow -12 = 4a - 2b + c \quad ...(3)$$

மேலும் (3, 8), (1)-ன் மீது அமைந்துள்ளது

$$\Rightarrow 8 = a(3)\,2 + b(3) + c$$
$$\Rightarrow 8 = 9a + 3b + c \quad ...(4)$$

விரிவுப்படுத்தப்பட்ட அணியை ஏறுபடிவ வடிவத்திற்கு தொடக்கநிலை உருமாற்றங்கள் செய்யக் கிடைப்பது,

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 36 & -6 & 1 & 8 \\ 4 & -2 & 1 & -12 \\ 0 & 3 & 1 & 8 \end{array}\right] \xrightarrow[R_3 \to 4R_3 - R_1]{R_2 \to 9R_2 - R_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 36 & -6 & 1 & 8 \\ 0 & -12 & 8 & -116 \\ 0 & 18 & 3 & 24 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[R_3 \to R_3 \div 3]{R_2 \to R_2 \div 4} \left[\begin{array}{ccc|c} 36 & -6 & 1 & 8 \\ 0 & -3 & 2 & -29 \\ 0 & 6 & 1 & 8 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_3 \to R_3 + 2R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 36 & -6 & 1 & -8 \\ 0 & -3 & 2 & -29 \\ 0 & 0 & 5 & -50 \end{array}\right]$$

ஏறுபடி வடிவத்திலிருந்து கிடைக்கும் சமமான சமன்பாடுகளின் தொகுப்பாக கிடைப்பது

$$36a - 6b + c = 8 \quad ...(1)$$
$$-3b + 2c = -29 \quad ...(2)$$
$$5c = -50$$
$$\Rightarrow c = \frac{-50}{5} = -10$$

c = –10 என (2) -ல் பிரதியிட கிடைப்பது,

$$-3b + 2(-10) = -29$$

$\Rightarrow \quad -3b - 20 = -29$

$\Rightarrow \quad -3b = -29 + 20$

$\Rightarrow \quad -3b = -9$

$\Rightarrow \quad b = \dfrac{-9}{-3} = 3$

$b = 3$ மற்றும் $c = -10$ என (1) ல் பிரதியிட கிடைப்பது,

$36a - 6(3) - 10 = 8$

$\Rightarrow \quad 36a - 18 - 10 = 8$

$\Rightarrow \quad 36a - 28 = 8$

$\Rightarrow \quad 36a = 8 + 28 = 36$

$\Rightarrow \quad a = \dfrac{36}{36} = 1$

$\therefore a = 1, b = 3, c = -10$

எனவே சிறுவனின் பாதை

$y = 1(x^2) + 3(x) - 10$

$\Rightarrow \quad y = x^2 + 3x - 10$

அவனுடைய நண்பன் P(7, 60) என்ற புள்ளியில் உள்ளதால்,

$60 = (7)^2 + 3(7) - 10$

$\Rightarrow \quad 60 = 49 + 21 - 10$

$\Rightarrow \quad 60 = 70 - 10 = 60$

$\Rightarrow \quad 60 = 60$

(7, 60) பாதையை நிறைவு செய்கிறது, அவன் P(7, 60)ல் உள்ள அவன் நண்பனை சந்திப்பான்.

பயிற்சி 1.6

1. பின்வரும் சமன்பாடுகளின் தொகுப்பு ஒருங்கமைவு உடையதா என்பதை ஆராய்க. ஒருங்கமைவு உடையதாயின் அவற்றைத் தீர்க்க.

(i) $x - y + 2z = 2, 2x + y + 4z = 7, 4x - y + z = 4$

(ii) $3x + y + z = 2, x - 3y + 2z = 1, 7x - y + 4z = 5$

(iii) $2x + 2y + z = 5, x - y + z = 1, 3x + y + 2z = 4$

(iv) $2x - y + z = 2, 6x - 3y + 3z = 6, 4x - 2y + 2z = 4.$

[பிடிஏ - 5; Hy - 2019]

தீர்வு : (i) $x - y + 2z = 2, 2x + y + 4z = 7, 4x - y + z = 4$

சமன்பாட்டு தொகுப்பின் அணி வடிவம் AX = B

இங்கு $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ 4 & -1 & 1 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ மற்றும் $B = \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \\ 4 \end{bmatrix}$

விரிவுபடுத்தப்பட்ட அணியை ஏறுபடி வடிவத்திற்கு உருமாற்றங்கள் செய்யக் கிடைப்பது [A|B],

$$[A|B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & 7 \\ 4 & -1 & 1 & 4 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[R_3 \to R_3 - 4R_1]{R_2 \to R_2 - 2R_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & -7 & -4 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_3 \to R_3 - R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -7 & -7 \end{array}\right]$$

இங்கு $\rho(A) = 3$ மற்றும் $\rho[A|B] = 3$

$\therefore \rho(A) = \rho[A|B] = 3$ = மதிப்பிட வேண்டிய மாறிகளின் எண்ணிக்கை

எனவே தொகுப்பு ஒருங்கமைவுடன் ஒரே ஒரு தீர்வை கொண்டிருக்கும்.

ஏறுபடி வடிவத்திலுள்ள அணியிலிருந்து கிடைக்கும் சமான சமன்பாடுகளின் தொகுப்பானது.

$x - y + 2z = 2 \quad ...(1)$

$3y = 3 \Rightarrow y = 1 \quad ...(2)$

$-7z = -7 \Rightarrow z = \dfrac{-7}{-7} = 1 \quad ...(3)$

$y = 1$ மற்றும் $z = 1$ என (1) ல் பிரதியிட,

$x - 1 + 2(1) = 2$

$\Rightarrow \quad x - 1 + 2 = 2$

$\Rightarrow \quad x + 1 = 2$

$\Rightarrow \quad x = 2 - 1 = 1$

$\Rightarrow \quad x = 1$

$\therefore x = 1, y = 1, z = 1$

ஆகையால், தீர்வு கணம் {1, 1, 1}.

(ii) $3x + y + z = 2, x - 3y + 2z = 1, 7x - y + 4z = 5.$

தொகுப்பின் அணி வடிவம் AX = B

இங்கு $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \\ 7 & -1 & 4 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}$

விரிவுபடுத்தப்பட்ட அணி [A|B] யை ஏறுபடி வடிவத்திற்கு உருமாற்றங்கள் செய்யக் கிடைப்பது,

$$[A|B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -3 & 2 & 1 \\ 7 & -1 & 4 & 5 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 2 \\ 7 & -1 & 4 & 5 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[R_3 \to R_3 - 7R_1]{R_2 \to R_2 - 3R_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 10 & -5 & -1 \\ 0 & 20 & -10 & -2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_3 \to R_3 - 2R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 10 & -5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

இங்கு $\rho(A) = 2$, மற்றும் $\rho[A|B] = 2$ [$\because$ 2 அபூச்சிய நிரைகள் உள்ளன]. ஆகையால், $\rho(A) = \rho[A|B] = 2 < 3$, கொடுக்கப்பட்ட தொகுப்புஒருங்கமைவுடன் தீர்வுகள் ஒரு சாராமாறிக் குடும்பமாக இருக்கும். ஆகையால் $z = t$, $x \in \mathbb{R}$. ஏறுபடி வடிவத்திலுள்ள அணியிலிருந்து கிடைக்கும் சமான சமன்பாடு களின் தொகுப்பு,

$$x - 3y + 2z = 1 \quad ...(1)$$
$$10y - 5z = -1 \quad ...(2)$$
$$z = t \quad ...(3)$$

(2) லிருந்து $10y - 5t = -1$

$$\Rightarrow \quad 10y = 5t - 1$$
$$\Rightarrow \quad y = \frac{1}{10}[5t - 1]$$

மேலும், (1)லிருந்து, $x - \frac{3}{10}[5t - 1] + 2t = 1$

$$\Rightarrow x = \frac{3}{10}[5t - 1] - 2t + 1 = \frac{15t - 3 - 20t + 10}{10}$$
$$\Rightarrow x = \frac{1}{10}[-5t + 7]$$

எனவே தீர்வு கணம் என்பது

$\{\frac{1}{10}(7 - 5t), \frac{1}{10}(5t - 1), t\}$ இங்கு $t \in \mathbb{R}$.

(iii) $2x + 2y + z = 5, x - y + z = 1, 3x + y + 2z = 4$

ஆகையால் தொகுப்பின் அணி $AX = B$ இங்கு

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

விரிவுபடுத்தப்பட்ட அணி $[A|B]$ யை ஏறுபடி வடிவத்திற்கு உருமாற்றங்கள் செய்யக் கிடைப்பது,

$$[A|B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[R_3 \to R_3 - 3R_1]{R_2 \to R_2 - 2R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & -1 & -1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_3 \to R_3 - R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{array}\right]$$

இங்கு $\rho(A) = 2$ [$\because$ 2 அபூச்சிய நிரைகள் உள்ளன]

மற்றும் $\rho[A|B] = 3$[$\because$ 3 அபூச்சிய நிரைகள் உள்ளன]

இங்கு $(A) \neq p[A|B]$

ஆகையால், கொடுக்கப்பட்ட தொகுப்பு ஒருங்கமைவு அற்றது மற்றும் தீர்வுகள் இல்லை.

**(iv) $2x - y + z = 2, 6x - 3y + 3z = 6,$
$4x - 2y + 2z = 4.$**

தொகுப்பின் அணி வடிவம் $AX = B$ இங்கு

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 6 & -3 & 3 \\ 4 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$[A|B]$ என்ற விரிவுபடுத்தப்பட்ட அணியில் தொடக்கநிலை நிரைச் செயலிகள் பயன்படுத்தக் கிடைப்பது,

$$[A|B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 2 \\ 6 & -3 & 3 & 6 \\ 4 & -2 & 2 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow[R_3 \to R_3 - 2R_1]{R_2 \to R_2 - 3R_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

இங்கு $\rho(A) = 1$[$\because$ ஒரே ஒரு அபூச்சிய நிரை]

மற்றும் $\rho[A|B] = 1$[$\because$ ஒரே ஒரு அபூச்சிய நிரை]

$\therefore \rho(A) = \rho[A|B] = 1 < 3$, கொடுக்கப்பட்ட தொகுப்பு ஒருங்கமைவுடன் இரு சாராமாறிக் குடும்பமாக தீர்வுகள் இருக்கும்.

ஆகையால், $z = t$ மற்றும் $y = s$ இங்கு $s, t \in \mathbb{R}$.

ஏறுபடி வடிவத்திலிருந்து கிடைக்கும் சமான சமன்பாடுகள்

$$2x - y + z = 2 \quad ...(1)$$
$$y = s \quad ...(2)$$
$$z = t \quad ...(3)$$

(2) மற்றும் (3) ஐ (1)ல் பிரதியிட கிடைப்பது,

$$2x - s + t = 2$$
$$\Rightarrow \quad 2x = s - t + 2$$
$$\Rightarrow \quad x = \frac{1}{2}[s - t + 2]$$

$\therefore$ தீர்வு கணம் $\{\frac{1}{2}(s - t + 2), s, t\}$

இங்கு $s, t \in \mathbb{R}$

2. k-ன் எம்மதிப்புகளுக்கு பின்வரும் சமன்பாட்டுத் தொகுப்பு
$kx - 2y + z = 1, x - 2ky + z = -2, x - 2y + kz = 1$

(i) யாதொரு தீர்வும் பெற்றிராது

(ii) ஒரே ஒரு தீர்வைப் பெற்றிருக்கும்

(iii) எண்ணிக்கையற்ற தீர்வுகளைப் பெற்றிருக்கும் என்பதனை ஆராய்க. **[Qy- 2019]**

தீர்வு : $kx - 2y + z = 1,\ x - 2ky + z = -2,\ x - 2y + k = 1$

சமன்பாட்டு தொகுப்பின் அணி வடிவம் $AX = B$ இங்கு

$$A = \begin{bmatrix} k & -2 & 1 \\ 1 & -2k & 1 \\ 1 & -2 & k \end{bmatrix},\ X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$[A|B]$ என்ற விரிவுபடுத்தப்பட்ட அணியில் தொடக்கநிலை நிரை செயலிகள் பயன்படுத்தக் கிடைப்பது,

$$[A/B] = \left[\begin{array}{ccc|c} k & -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2k & 1 & -2 \\ 1 & -2 & k & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & k & 1 \\ 1 & -2k & 1 & -2 \\ k & -2 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[R_3 \to R_3 - kR_1]{R_2 \to R_2 - R_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & k & 1 \\ 1 & -2k+2 & k & -3 \\ 0 & -2+2k & 1-k^2 & 1-k \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_3 \to R_3 + R_2} \begin{bmatrix} 1 & -2 & k & 1 \\ 0 & -2k+2 & 1-k & -3 \\ 0 & 0 & 1-k^2+1-k & -k-2 \end{bmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & -2 & k & 1 \\ 0 & -2k+2 & 1-k & -3 \\ 0 & 0 & -k^2-k+2 & -k-2 \end{bmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & -2 & k & 1 \\ 0 & -2k+2 & 1-k & -3 \\ 0 & 0 & (k+2)(1-k) & -k-2 \end{bmatrix} \quad ...(1)$$

நிலை (i) $k = 1$ எனில்

$$[A|B] \to \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 \to R_3 - R_2} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

இங்கு $\rho(A) = 1$ மற்றும் $\rho[A|B] = 2$

ஆகையால், $\rho(A) \neq \rho[A|B] \Rightarrow$ தொகுப்பற்கு தீர்வு இல்லை.

நிலை (ii) $k \neq 1, k \neq -2$ எனில்

$$[A|B] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & k & 1 \\ 0 & -2k+2 & 1-k & -3 \\ 0 & 0 & \text{பூச்சியமற்ற} & \text{பூச்சியமற்ற} \end{array}\right]$$

$\Rightarrow \rho(A) = 3$ மற்றும் $\rho[A|B] = 3$

ஆகையால், $\rho(A) = \rho[A|B] = 3 =$ மதிப்பிட வேண்டிய மாறிகளின் எண்ணிக்கை ஆகையால், தொகுப்புக்கு ஒரே ஒரு தீர்வு உண்டு.

நிலை (iii) $k = -2$ எனில்

$$\rho[A|B] \to \begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 & 1 \\ 1 & 6 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

இங்கு $\rho(A) = 2$ மற்றும் $\rho[A|B] = 2$

$\therefore\ \rho(A) = \rho[A|B] = 2 < 3$, மதிப்பிட வேண்டிய மாறிகளின் எண்ணிக்கை. ஆகையால் தொகுப்பு ஒருங்கமைவுடன் எண்ணிக்கையற்ற தீர்வுகளை கொண்டிருக்கும்.

3. λ, μ-இன் எம்மதிப்புகளுக்கு $2x + 3y + 5z = 9$, $7x + 3y - 5z = 8$, $2x + 3y + \lambda z = \mu$, என்ற சமன்பாடுகளின் தொகுப்பானது.

(i) யாதொரு தீர்வும் பெற்றிராது

(ii) ஒரே ஒரு தீர்வைப் பெற்றிருக்கும்

(iii) எண்ணிக்கையற்ற தீர்வுகளைப் பெற்றிருக்கும் என்பதனை ஆராய்க.

தீர்வு : $2x + 3y = 9,\ 7x + 3y - 5z = 8,\ 2x + 3y + \lambda z = \mu$

சமன்பாட்டு தொகுப்பின் அணி வடிவம் $AX = B$ இங்கு

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 7 & 3 & -5 \\ 2 & 3 & \lambda \end{bmatrix},\ X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 9 \\ 8 \\ \mu \end{bmatrix}$$

$[A|B]$ என்ற விரிவுபடுத்தப்பட்ட அணியில் தொடக்கநிலை நிரைச் செயலிகள் பயன்படுத்தக் கிடைப்பது,

$$[A|B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 5 & 9 \\ 7 & 3 & -5 & 8 \\ 2 & 3 & \lambda & \mu \end{array}\right] \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 7 & 3 & -5 & 8 \\ 2 & 3 & 5 & 9 \\ 2 & 3 & \lambda & \mu \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[R_3 \to R_3 - R_2]{R_2 \to R_2 - \frac{2}{7}R_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 7 & 3 & -5 & -8 \\ 0 & \frac{15}{7} & \frac{45}{7} & \frac{45}{7} \\ 0 & 0 & \lambda-5 & 4-9 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_2 \to R_2 \times 7} \left[\begin{array}{ccc|c} 7 & 3 & -5 & -8 \\ 0 & 15 & 45 & 47 \\ 0 & 0 & \lambda-5 & \mu-9 \end{array}\right]$$

நிலை (i) $\lambda = 5$ எனில்

$$[A|B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 7 & 3 & -5 & -8 \\ 0 & 15 & 45 & 47 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{array}\right]$$

இங்கு $\rho(A) = 2$ மற்றும் $\rho[A|B] = 3$

ஆகையால், $\rho(A) \neq \rho[A|B]$

ஆகையால் தொகுப்பு ஒருங்கமைவு அற்றது மற்றும் தீர்வு இல்லை.

நிலை (ii) $\lambda \neq 5, \mu \neq 9$ எனில்

$$[A|B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 7 & 3 & -5 & -8 \\ 0 & 15 & 45 & 47 \\ 0 & 0 & \text{பூச்சியமற்ற} & \text{பூச்சியமற்ற} \end{array}\right]$$

இங்கு $\rho(A) = 3$ மற்றும் $\rho[A|B] = 3$

$\therefore$ $\rho(A) = \rho[A|B] = 3$ = மதிப்பிட வேண்டிய மாறிகளின் எண்ணிக்கை

ஆகையால் தொகுப்பு ஒருங்கமைவுடன் ஒரே ஒரு தீர்வை கொண்டிருக்கும்.

நிலை (iii) $\lambda = 5$ மற்றும் $\mu = 9$ எனில்

$$[A|B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 7 & 3 & -5 & -8 \\ 0 & 15 & 45 & 47 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

இங்கு $\rho(A) = 2, \rho[A|B] = 2$

$\therefore \rho(A) = [A|B] = 2 <$ மதிப்பிட வேண்டிய மாறிகளின் எண்ணிக்கை

$\therefore$ தொகுப்பு ஒருங்கமைவுடன் மற்றும் எண்ணிக்கையற்ற தீர்வுகளை கொண்டிருக்கும்.

பயிற்சி 1.7

1. பின்வரும் சமப்படித்தான நேரியச் சமன்பாட்டுத் தொகுப்பைத் தீர்க்கவும்.

(i) $3x + 2y + 7z = 0, 4x - 3y - 2z = 0, 5x + 9y + 23z = 0$

(ii) $2x + 3y - z = 0, x - y - 2z = 0, 3x + y + 3z = 0.$

தீர்வு : (i) $3x + 2y + 7z = 0, 4x - 3y - 2z = 0, 5x + 9y + 23z = 0$

விரிவுபடுத்தப்பட்ட அணியில் தொடக்கநிலை நிரை செயலிகள் பயன்படுத்தக் கிடைப்பது,

$[A|0] =$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 7 & 0 \\ 4 & -3 & -2 & 0 \\ 5 & 9 & 23 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2 \to R_2 - \frac{4}{4}R_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 7 & 0 \\ 0 & -\frac{17}{3} & \frac{-34}{3} & 0 \\ 5 & 9 & 23 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_3 \to R_3 - \frac{5}{3}R_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 7 & 0 \\ 0 & -\frac{17}{3} & \frac{-34}{3} & 0 \\ 5 & \frac{17}{3} & \frac{34}{3} & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_3 \to R_3 + R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 7 & 0 \\ 0 & -\frac{17}{3} & \frac{-34}{3} & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_2 \to R_2 \times \frac{-3}{7}} \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 7 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

இங்கு $\rho(A) = 2$ மற்றும் $\rho[A|0] = 2$

ஆகையால், $\rho(A) = \rho([A|0]) = 2 < 3$ = மதிப்பிட வேண்டிய மாறிகளின் எண்ணிக்கை

இங்கு, தொகுப்பு ஒருங்கமைவுடன் ஒரு சாராமாறிக் குடும்பமாக தீர்வுகளை கொண்டிருக்கும்.

ஆகையால் $z = t$ என பிரதியிடு இங்கு $t \in \mathbb{R}$.

ஏறுபடி வடிவத்திலிருந்து சமன்பாடுகளை எழுத கிடைப்பது

$$3x + 2y + 7z = 0 \quad ...(1)$$
$$y + 2z = 0 \quad ...(2)$$

$z = t$,என பிரதியிடு (2) லிருந்து

$$y + 2t = 0$$
$$\Rightarrow \quad y = -2t$$

$\therefore$ (1) லிருந்து, $3x + 2(-2t) + 7t = 0$

$$\Rightarrow \quad 3x - 4t + 7t = 0$$
$$\Rightarrow \quad 3x + 3t = 0$$
$$\Rightarrow \quad 3x = -3t$$
$$\Rightarrow \quad x = -t$$

$\therefore$ தீர்வு கணம் $\{-t, -2t, t\}$ இங்கு $t \in \mathbb{R}$

(ii) $2x + 3y - z = 0, x - y - 2z = 0, 3x + y + 3z = 0.$

விரிவுபடுத்தப்பட்ட அணியில் தொடக்கநிலை நிரை செயலிகள் பயன்படுத்தக் கிடைப்பது

$$[A|0] = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[R_3 \to R_3 - 3R_1]{R_2 \to R_2 - 2R_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 5 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 9 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_3 \to R_3 - \frac{4}{5}R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 5 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{33}{5} & 0 \end{array}\right]$$

இங்கு $\rho(A) = 3$ மற்றும் $\rho([A|0]) = 3$

$\therefore$ $\rho(A) = \rho([A|0]) = 3 =$ மதிப்பிட வேண்டிய மாறிகளின் எண்ணிக்கை

ஆகையால் தொகுப்பு ஒருங்கமைவுடன் ஒரே ஒரு தீர்வை கொண்டிருக்கும்.

ஆகையால் தொகுப்பு வெளிப்படை தீர்வை மட்டும் கொண்டிருக்கும்.

2. λ -வின் எம்மதிப்பிற்கு

$x + y + 3z = 0, 4x + 3y + \lambda z = 0, 2x + y + 2z = 0$ என்ற தொகுப்பிற்கு

(i) வெளிப்படைத் தீர்வு

(ii) வெளிப்படையற்ற தீர்வு கிடைக்கும்

தீர்வு : $x + y + 3z = 0, 4x + 3y + \lambda z = 0, 2x + y + 2z = 0$

விரிவுப்படுத்தப்பட்ட அணியை ஏறுபடி வடிவத்திற்கு மாற்ற கிடைப்பது,

$$[A|0] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 4 & 3 & \lambda & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & \lambda & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[R_3 \to R_3 - 4R_1]{R_2 \to R_2 - 2R_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -4 & 0 \\ 0 & -1 & \lambda - 2 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_3 \to R_3 - R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda - 8 & 0 \end{array}\right]$$

நிலை (i) $\lambda \neq 8$ எனில்

$$[A|0] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & \text{பூச்சியமற்ற} & 0 \end{array}\right]$$

இங்கு $\rho(A) = 3, \rho([A/O]) = 3$

$\therefore$ $\rho(A) = \rho([A/0]) = 3 =$ மதிப்பிட வேண்டிய மாறிகளின் எண்ணிக்கை

$\therefore$ கொடுக்கப்பட்ட தொகுப்பு ஒருங்கமைவுடன் ஒரே ஒரு தீர்வை கொண்டிருக்கும்.

நிலை (ii) $\lambda = 8$ எனில்

$$[A|0] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

இங்கு $\rho(A) = 2, \rho([A|0]) = 2$

$\therefore$ $\rho(A) = \rho([A|0]) = 2 < 3$, மதிப்பிட வேண்டிய மாறிகளின் எண்ணிக்கை,

$\therefore$ தொகுப்பு ஒருங்கமைவுடன் வெளிப்படையற்ற தீர்வுகளை உடையது.

3. காஸ்ஸீயன் நீக்கல் முறையைப் பயன்படுத்தி: $C_2H_6 + O_2 \to H_2O + CO_2$ என்ற வேதியியல் எதிர்வினைச்சமன்பாட்டை சமநிலைப்படுத்துக.

[அ.மா.வி - 2019]

தீர்வு : கொடுக்கப்பட்ட $C_2H_6 + O_2 \to H_2O + CO_2$

நாம் மிகை எண்கள் x_1, x_2, x_3 மற்றும் x_4 இவ்வாறு காண வேண்டும்.

$$x_1\, C_2H_6 + x_2\, O_2 \to x_3\, H_2O + x_4\, CO_2 \qquad ...(1)$$

(1) ல் இடது பக்கத்தில் உள்ள கார்பன் அணுக்களின் எண்ணிக்கை வலது பக்கத்தில் உள்ள கார்பன் அணுக்களின் எண்ணிக்கைக்கு சமமாக இருக்க வேண்டும்.

$$\therefore\ 2x_1 = 1x_4$$
$$\Rightarrow\ 2x_1 - x_4 = 0 \qquad ...(2)$$

ஹைட்ரஜன் அணுக்களால் கிடைப்பது,

$$6x_1 = 2x_3$$
$$\Rightarrow\ 6x_1 - 2x_3 = 0$$
$$\Rightarrow\ 3x_1 - x_3 = 0 \qquad ...(3)$$

மேலும், ஆக்ஸிஜன் அணுக்களால் கிடைப்பது,

$$2x_2 = 1x_3 + 2x_4$$
$$\Rightarrow 2x_2 - x_3 - 2x_4 = 0 \qquad ...(3)$$

4 மாறிகளில் அமைந்த நேரியில் சமபடித்தான தொகுப்பு சமன்பாடுகள் (2), (3) மற்றும் (4)

$\therefore$ விரிவுபடுத்தப்பட்ட அணி $[A|0]$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -2 & 0 \end{array}\right]$$

காஸ்ஸியன் நீக்கல் முறை மூலம் கிடைப்பது,

$$\xrightarrow{R_1 \to R_1 \div 2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{-1}{2} & 0 \\ 3 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -2 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_2 \to R_2 - 3R_1} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{-1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -2 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_3 \to R_3 - R_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{-1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \frac{-7}{2} & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_3} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{-1}{2} & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \frac{-7}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \frac{3}{2} & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[\substack{R_2 \to 2R_2 \\ R_2 \to 2R_3}]{R_1 \to 2R_1} \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & 0 \end{array}\right]$$

இங்கு $\rho(A) = \rho([A|B]) = 3 < 4$, மதிப்பிட வேண்டிய மாறிகளின் எண்ணிக்கை.

$\therefore$ தொகுப்பு ஒருங்கமைவுடன் ஒரு சாராமாறிக் குடும்ப தீர்வுகளை கொண்டிருக்கும், ஆகையால் $x^4 = t$ என்க.

ஏறுபடிவத்திலிருந்து சமன்பாடுகளை எழுத கிடைப்பது

$$2x_1 - x_4 = 0$$
$$\Rightarrow \quad 2x_1 = x_4 \quad \Rightarrow 2x = t$$
$$\Rightarrow \quad x_1 = \frac{t}{2}$$
$$4x_2 - 7x_4 = 0$$
$$\Rightarrow \quad 4x_2 = 7t \Rightarrow x_2 = \frac{7t}{4}$$
$$-2x_3 + 3x_4 = 0 \Rightarrow 2x_3 = 3x_4$$
$$\Rightarrow \quad x_3 = \frac{3t}{2}$$

x_1, x_2, x_3 மற்றும் x_4 மிகை முழுக்கள், ஆதலால்,

$t = 4$ என தேர்ந்தெடுக்க

$$\therefore x_1 = \frac{4}{2} = 2$$
$$\therefore x_2 = \frac{7(\cancel{4})}{\cancel{4}} = 7$$
$$\therefore x_3 = \frac{3(\cancel{4})^{2}}{\cancel{2}} = 6 \text{ மற்றும்}$$
$$x_4 = t = 4$$

ஆகையால் சமநிலைப்படுத்தப்பட்ட சமன்பாடு

$2\,C_2H_6 + 7O_2 \to 6H_2O + 4CO_2$.

பயிற்சி 1.8

கொடுக்கப்பட்ட நான்கு விடைகளிலிருந்து சரியான அல்லது மிகப் பொருத்தமான விடையைத் தேர்ந்தெடுக்க.

1. $|\text{adj}\,(\text{adj}\,A)| = |A|^9$, எனில், சதுர அணி A -யின் வரிசையானது

(1) 3 (2) 4 (3) 2 (4) 5

[விடை : (2) 4]

குறிப்பு : $|\text{adj}\,(\text{adj})A| = |A|^{(n-1)^2}$

$$\therefore (n-1)^2 = 9$$
$$\Rightarrow (n-1)^2 = 3^2 \Rightarrow n-1 = 3$$
$$\Rightarrow n = 4$$

2. A என்ற 3 × 3 பூச்சியமற்றக் கோவை அணிக்கு $AA^T = A^T A$ மற்றும் $B = A^{-1}A^T$, என்றவாறு இருப்பின் $BB^T =$

(1) A (2) B (3) I_3 (4) B^T

[விடை : (3) I_3]

குறிப்பு :
$$\begin{aligned} BB^T &= (A^{-1}A^T)(A^{-1}A^T)^T \\ &= (A^{-1}A^T)\,(A^T)^T\cdot(A^{-1})^T \\ &= (A^{-1}A^T)\,(AA^{-1})^T \\ &= A^{-1}(A.A^T)(A^{-1})^T \\ &= (A^{-1}A).\,A^T\,(A^T)^{-1} && [\because (A^{-1})^T = (A^T)^{-1}] \\ &= I\cdot I = I && [\because A^T\cdot(A^T)^{-1} = I] \end{aligned}$$

3. $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, B = adj A மற்றும் C = 3A எனில், $\frac{|\text{adj}\,B|}{|C|} =$ [அ.மா.வி - 2019]

(1) $\frac{1}{3}$ (2) $\frac{1}{9}$ (3) $\frac{1}{4}$ (4) 1

[விடை : (2) $\frac{1}{9}$]

குறிப்பு :
$$\frac{|\text{adj}\,B|}{|C|} = \frac{|\text{adj}(\text{adj}\,A)|}{|3A|} = \frac{|A|^{(n-1)^2}}{|3|^2.|A|}$$
$$= \frac{|A|^{1^2}}{|B|^2.|A|} = \frac{|A|}{9.|A|} = \frac{1}{9}$$

4. $A\begin{bmatrix}1 & -2\\1 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6 & 0\\0 & 6\end{bmatrix}$ **எனில், A =**

(1) $\begin{bmatrix}1 & -2\\1 & 4\end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix}1 & 2\\-1 & 4\end{bmatrix}$

(3) $\begin{bmatrix}4 & 2\\-1 & 1\end{bmatrix}$ (4) $\begin{bmatrix}4 & -1\\2 & 1\end{bmatrix}$

[விடை : (3) $\begin{bmatrix}4 & 2\\-1 & 1\end{bmatrix}$]

குறிப்பு : $AX = B$

$\Rightarrow A = BX^{-1}$ இங்கு

$X = \begin{bmatrix}1 & -2\\1 & 4\end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix}6 & 0\\0 & 6\end{bmatrix}$

$A = \begin{bmatrix}6 & 0\\0 & 6\end{bmatrix}\cdot\frac{1}{|X|}\cdot \text{adj}(X)$

$= \cancel{6}\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}\cdot\frac{1}{\cancel{6}}\begin{bmatrix}4 & 2\\-1 & 1\end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4 & 2\\-1 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4 & 2\\-1 & 1\end{bmatrix}$

5. $A=\begin{bmatrix}7 & 3\\4 & 2\end{bmatrix}$ **எனில், $9I_2 - A$ =** [பிடிஎ - 2]

(1) A^{-1} (2) $\frac{A^{-1}}{2}$ (3) $3A^{-1}$ (4) $2A^{-1}$

[விடை : (4) $2A^{-1}$]

குறிப்பு : $9I - A = \begin{bmatrix}9 & 0\\0 & 9\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}7 & 3\\4 & 2\end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix}9-7 & 0-3\\0-4 & 9-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & -3\\-4 & 7\end{bmatrix}= \text{adj } A$

ஆனால் $A^{-1} = \frac{1}{|A|}\text{ adj } A = \frac{1}{2} \Rightarrow \text{adj } A = 2A^{-1}$

6. $A=\begin{bmatrix}2 & 0\\1 & 5\end{bmatrix}$ **மற்றும்** $B=\begin{bmatrix}1 & 4\\2 & 0\end{bmatrix}$ **எனில், |adj (AB)| =**

(1) –40 (2) –80 (3) –60 (4) –20

[விடை : (2) –80]

குறிப்பு : $AB = \begin{bmatrix}2+0 & 8+0\\1+10 & 4+0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 8\\11 & 4\end{bmatrix}$

$\text{adj}(AB) = \begin{bmatrix}4 & -8\\-11 & 2\end{bmatrix}$

$|\text{adj}(AB)| = 8 - 88 = -80$

7. $P = \begin{vmatrix}1 & x & 0\\1 & 3 & 0\\2 & 4 & -2\end{vmatrix}$ **என்பது 3 × 3 வரிசையுடைய அணி A -ன் சேர்ப்பு அணி மற்றும் |A| = 4, எனில், x ஆனது**

(1) 15 (2) 12 (3) 14 (4) 11

[விடை : (4) 11]

குறிப்பு : $|\text{adj } A| = |A|^{n-1}$

$1\begin{vmatrix}3 & 0\\4 & -2\end{vmatrix} - x\begin{vmatrix}1 & 0\\2 & -2\end{vmatrix} + 0 = 4^{3-1}$

$\Rightarrow -6 - x(-2) = 4^2 \Rightarrow -6 + 2x = 16$

$\Rightarrow 2x = 22 \Rightarrow x = 11$

8. $A=\begin{bmatrix}3 & 1 & -1\\2 & -2 & 0\\1 & 2 & -1\end{bmatrix}$ **மற்றும்** $A^{-1}=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\a_{21} & a_{22} & a_{23}\\a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{bmatrix}$

எனில், a_{23} -ன் மதிப்பானது [பிடிஎ - 5]

(1) 0 (2) –2 (3) –3 (4) –1

[விடை : (4) –1]

குறிப்பு : $|A| = 3\begin{vmatrix}-2 & 0\\2 & -1\end{vmatrix} -1\begin{vmatrix}2 & 0\\1 & -1\end{vmatrix} -1\begin{vmatrix}2 & -2\\1 & 2\end{vmatrix}$

$= 3(2) - 1(-2) - 1(4+2)$

$= 6 + 2 - 6 = 2$

$a_{23} = \frac{1}{|A|}\, a_{32}$ - இணை காரணி

$= \frac{1}{2} \times -\begin{vmatrix}3 & -1\\2 & 0\end{vmatrix}$

$= -\frac{1}{2}(0+2) = \frac{-2}{2} = -1$

9. A, B மற்றும் C என்பன நேர்மாறு காணத்தக்கவாறு ஏதேனுமொரு வரிசையில் இருப்பின் பின்வருவனவற்றில் எது உண்மையல்ல?

(1) $\text{adj } A = |A|A^{-1}$

(2) $\text{adj}(AB) = (\text{adj } A)(\text{adj } B)$

(3) $\det A^{-1} = (\det A)^{-1}$

(4) $(ABC)^{-1} = C^{-1}B^{-1}A^{-1}$

[விடை : (2) adj (AB) = (adj A) (adj B)]

10. $(AB)^{-1} = \begin{bmatrix} 12 & -17 \\ -19 & 27 \end{bmatrix}$ மற்றும் $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$ எனில், $B^{-1} =$

(1) $\begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -3 & 8 \end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix} 8 & 5 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$

(3) $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ (4) $\begin{bmatrix} 8 & -5 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$

[விடை : (1) $\begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -3 & 8 \end{bmatrix}$]

குறிப்பு : $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ ஆதலால் கிடைப்பது

$$\begin{bmatrix} 12 & -17 \\ -19 & 27 \end{bmatrix} = B^{-1}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

$X = B^{-1}\,Y$ என்க.

$$B^{-1} = XY^{-1} = \begin{bmatrix} 12 & -17 \\ -19 & 27 \end{bmatrix}\cdot\frac{1}{|Y|}.(\text{adj } Y)$$

$$= \begin{bmatrix} 12 & -17 \\ -19 & 27 \end{bmatrix}\cdot\frac{1}{1}\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 12 & -17 \\ -19 & 27 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 36-34 & 12-17 \\ -57+54 & -19+27 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -3 & 8 \end{bmatrix}$$

11. $A^T.A^{-1}$ ஆனது சமச்சீர் எனில், $A^2 =$

(1) A^{-1} (2) $(A^T)^2$ (3) A^T (4) $(A^{-1})^2$

[விடை : (2) $(A^T)^2$]

குறிப்பு : $A^T A^{-1} = (A^T A^{-1})^T$

$= (A^{-1})^T (A^T)^T = (A^{-1})^T A$

$\Rightarrow A = A^T \Rightarrow$ A சமச்சீர் அணி

$\therefore A^2 = (A^T)^2$

12. A என்பது பூச்சியமற்றக் கோவை அணி மற்றும் $A^{-1} = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$ எனில், $(A^T)^{-1} =$ [பிடிஏ - 1]

(1) $\begin{bmatrix} -5 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$

(3) $\begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ (4) $\begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$

[விடை : (4) $\begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$]

குறிப்பு : $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$

13. $A = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ x & \frac{3}{5} \end{bmatrix}$ மற்றும் $A^T = A^{-1}$ எனில், x -ன் மதிப்பு

(1) $\frac{-4}{5}$ (2) $\frac{-3}{5}$ (3) $\frac{3}{5}$ (4) $\frac{4}{5}$

[விடை : (1) $\frac{-4}{5}$]

குறிப்பு : $A^T = A^{-1}, AA^T = A^T A = I$

[$\because$ அவைகள் செங்குத்து]

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ x & \frac{3}{5} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{3}{5} & x \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \frac{9}{25}+\frac{16}{25} & \frac{3x}{5}+\frac{12}{25} \\ \frac{3x}{5}+\frac{12}{25} & x^2+\frac{9}{25} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \frac{3x}{5}+\frac{12}{25} = 0$$

[இருபுறமும் a_{12} ஐ ஒப்பிட கிடைப்பது]

$$\Rightarrow \frac{3x}{5} = \frac{-12}{25} \Rightarrow x = \frac{-12}{25}\times\frac{5}{3} = \frac{-4}{5}$$

14. $A = \begin{bmatrix} 1 & \tan\frac{\theta}{2} \\ -\tan\frac{\theta}{2} & 1 \end{bmatrix}$ மற்றும் $AB = I_2$ எனில், $B =$ [பிடிஏ - 2]

(1) $\left(\cos^2\frac{\theta}{2}\right)A$ (2) $\left(\cos^2\frac{\theta}{2}\right)A^T$

(3) $(\cos^2\theta)I$ (4) $\left(\sin^2\frac{\theta}{2}\right)A$

[விடை : (2) $\left(\cos^2\frac{\theta}{2}\right)A^T$]

குறிப்பு : $B = A^{-1} = \frac{1}{|A|}\text{ adj } A$

$$= \frac{1}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}}\begin{bmatrix} 1 & -\tan\frac{\theta}{2} \\ \tan\frac{\theta}{2} & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sec^2\frac{\theta}{2}}.A^T = \left(\cos^2\frac{\theta}{2}\right)A^T$$

15. $A = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ மற்றும் $A(\text{adj } A) = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$ எனில், $k =$

(1) 0 (2) $\sin\theta$ (3) $\cos\theta$ (4) 1

[விடை : (4) 1]

குறிப்பு : $A(\text{adj } A) = (\text{adj } A)A = |A|\, I$ என அறிவோம்

$$\Rightarrow |A| = K$$

$$\therefore K = \begin{vmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{vmatrix} = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$$

16. $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$ **மற்றும்** $\lambda A^{-1} = A$ **எனில்,** λ **-ன் மதிப்பு**

(1) 17 (2) 14 (3) 19 (4) 21

[விடை : (3) 19]

குறிப்பு : $\lambda . \dfrac{1}{|A|}$ adj $A = A$

$$\Rightarrow \lambda . \frac{1}{(-4-15)} . \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ -5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \frac{-\lambda}{19}\begin{bmatrix} -2 & -3 \\ -5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \frac{\lambda}{19}\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \frac{\lambda}{19} = 1 \Rightarrow \lambda = 19$$

17. adj $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$ **மற்றும்** adj $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$ **எனில், adj (AB) ஆனது**

(1) $\begin{bmatrix} -7 & -1 \\ 7 & -9 \end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix} -6 & 5 \\ -2 & -10 \end{bmatrix}$

(3) $\begin{bmatrix} -7 & 7 \\ -1 & -9 \end{bmatrix}$ (4) $\begin{bmatrix} -6 & -2 \\ 5 & -10 \end{bmatrix}$

[விடை : (2) $\begin{bmatrix} -6 & 5 \\ -2 & -10 \end{bmatrix}$**]**

குறிப்பு : adj (AB) = (adj B) (adj A)

$$= \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2-8 & 3+2 \\ -6+4 & -9-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & 5 \\ -2 & -10 \end{bmatrix}$$

18. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ -1 & -2 & -3 & -4 \end{bmatrix}$ **-ன் அணித்தரம் [Qy- 2019]**

(1) 1 (2) 2 (3) 4 (4) 3

[விடை : (1) 1]

குறிப்பு : $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ -1 & -2 & -3 & -4 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_3 \to R_3 + R_1]{R_2 \to R_2 - 2R_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$\therefore$ தரமானது 1 [$\because$ ஒரே ஒரு அபூச்சிய நிரை]

19. $x^a y^b = e^m, x^c y^d = e^n, \Delta_1 = \begin{bmatrix} m & b \\ n & d \end{bmatrix}, \Delta_2 = \begin{bmatrix} a & m \\ c & n \end{bmatrix}$, $\Delta_3 = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ **எனில்,** x **மற்றும்** y **-ன் மதிப்புகள் முறையே,** **[பிடிஏ - 2]**

(1) $e^{(\Delta_2/\Delta_1)}, e^{(\Delta_3/\Delta_1)}$

(2) $\log(\Delta_1/\Delta_3), \log(\Delta_2/\Delta_3)$

(3) $\log(\Delta_2/\Delta_1), \log(\Delta_3/\Delta_1)$

(4) $e^{(\Delta_1/\Delta_3)}, e^{(\Delta_2/\Delta_3)}$

[விடை : (4) $e^{(\Delta_1/\Delta_3)}, e^{(\Delta_2/\Delta_3)}$**]**

குறிப்பு :

$$x^a y^b = e^m$$

$$\Rightarrow a \log x + b \log y = m$$

[இருபுறமும் மடக்கை எடுக்க]

$$x^c . y^d = e^n$$

$$\Rightarrow c \log x + d \log y = n$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$ என பிரதியிடு

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} m & b \\ n & d \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a & m \\ c & n \end{vmatrix}$$

$\log x = \dfrac{\Delta_1}{\Delta_3}$ மற்றும் $\log y = \dfrac{\Delta_2}{\Delta_3}$

$\therefore x = e^{\Delta_1/\Delta_3}$ மற்றும் $y = e^{\Delta_2/\Delta_3}$

20. பின்வருபனவற்றுள் எவை/எவைகள் உண்மை யானவை?

(i) ஒரு சமச்சீர் அணியின் சேர்ப்பு அணி சமச்சீராக இருக்கும்.

(ii) ஒரு மூலைவிட்ட அணியின் சேர்ப்பு அணி மூலை விட்ட அணியாக இருக்கும்.

(iii) Aஎன்பது n வரிசையுடைய ஒரு சதுர அணி மற்றும் λ என்பது ஒரு திசையிலி எனில் adj $(\lambda A) = \lambda^n$ adj (A).

(iv) A(adjA) = (adj A) A = |A|I

(1) (i) மட்டும் (2) (ii) மற்றும் (iii)

(3) (iii) மற்றும் (iv)

(4) (i), (ii) மற்றும் (iv)

[விடை : (4) (i) (ii) மற்றும் (iv)]

21. $\rho(A) = \rho([A|B])$ **எனில், AX = B என்ற நேரியச் சமன்பாடுகளின் தொகுப்பானது** [பிடிஎ - 5]

(1) ஒருங்கமைவுடையது மற்றும் ஒரே ஒரு தீர்வு பெற்றிருக்கும்
(2) ஒருங்கமைவுடையது
(3) ஒருங்கமைவுடையது மற்றும் எண்ணற்ற தீர்வுகள் பெற்றிருக்கும்
(4) ஒருங்கமைவற்றது

[விடை : (2) ஒருங்கமைவுடையது]

22. $0 \le \theta \le \pi$ **மற்றும்** $x + (\sin\theta)y - (\cos\theta)z = 0$, $(\cos\theta)x - y + z = 0$, $(\sin\theta)x + y - z = 0$ **மற்றும் தொகுப்பானது வெளிப்படையற்றத் தீர்வு பெற்றிருப்பின், θ-ன் மதிப்பு** [Qy- 2019]

(1) $\frac{2\pi}{3}$ (2) $\frac{3\pi}{4}$ (3) $\frac{5\pi}{6}$ (4) $\frac{\pi}{4}$

[விடை : (4) $\frac{\pi}{4}$ **]**

குறிப்பு : $A = \begin{bmatrix} 1 & \sin\theta & -\cos\theta \\ \cos\theta & -1 & 1 \\ \sin\theta & 1 & -1 \end{bmatrix}$

$|A| = 0$ தொகுப்பிற்கு வெளிப்படையற்ற தீர்வுகள் இருக்கும்.

$$\begin{vmatrix} 1 & \sin\theta & -\cos\theta \\ \cos\theta & -1 & 1 \\ \sin\theta & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow 1\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} - \sin\theta\begin{vmatrix} \cos\theta & 1 \\ \sin\theta & -1 \end{vmatrix} - \cos\theta\begin{vmatrix} \cos\theta & -1 \\ \sin\theta & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$\Rightarrow 1(1-1) - \sin\theta(-\cos\theta - \sin\theta) - \cos\theta(\cos\theta + \sin\theta) = 0$

$\Rightarrow \sin\theta\,\cancel{\cos\theta} + \sin^2\theta - \cos^2\theta - \cancel{\cos\theta}\,\sin\theta = 0$

$\Rightarrow \cos^2\theta - \sin^2\theta = 0 \Rightarrow \cos 2\theta = 0$

$\Rightarrow \cos 2\theta = \cos\frac{\pi}{2}$ $\left[\because \cos\frac{\pi}{2} = 0\right]$

$\Rightarrow 2\theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$

23. ஒரு நேரியச் சமன்பாட்டுத் தொகுப்பின் விரிவுபடுத்தப்பட்ட அணியானது $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 7 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & \lambda-7 & \mu+5 \end{bmatrix}$ **மற்றும் தொகுப்பானது எண்ணற்ற தீர்வுகள் பெற்றிருக்கும் எனில்,**

(1) $\lambda = 7, \mu \ne -5$ (2) $\lambda = -7, \mu = 5$
(3) $\lambda \ne 7, \mu \ne -5$ (4) $\lambda = 7, \mu = -5$

[விடை : (4) $\lambda = 7, \mu = -5$**]**

குறிப்பு : $\lambda = 7$ மற்றும் $\mu = -5$ எனில்,

$$[A|B] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 7 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\rho(A) = \rho([A|B]) = 2 < 3$, மதிப்பிட வேண்டிய மாறிகளின் எண்ணிக்கை

∴ தொகுப்பு ஒருங்கமைவு உடையது மற்றும் எண்ணிக்கையற்ற தீர்வுகளை கொண்டிருக்கும்.

24. $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ **மற்றும்** $4B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & x \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ **என்க. A-ன் நேர்மாறு B எனில்,** x **-ன் மதிப்பு**

(1) 2 (2) 4 (3) 3 (4) 1

[விடை : (4) 1]

குறிப்பு : $A = B^{-1} \Rightarrow A\,.\,B = B^{-1}.B \Rightarrow AB = I$

$$\therefore \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}\frac{1}{4}\begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & x \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{4}a_{13} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4}.[-2 - x + 3] = 0$$

$$\Rightarrow -x + 1 = 0 \times 4 = 0$$

$$\Rightarrow x = 1$$

25. $A = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 4 \\ 2 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ **எனில், adj (adj A)-ன் மதிப்பு** [பிடிஎ - 2]

(1) $\begin{bmatrix} 3 & -3 & 4 \\ 2 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix} 6 & -6 & 8 \\ 4 & -6 & 8 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}$

(3) $\begin{bmatrix} -3 & 3 & -4 \\ -2 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ (4) $\begin{bmatrix} 3 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 4 \end{bmatrix}$

[விடை : (1) $\begin{bmatrix} 3 & -3 & 4 \\ 2 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$**]**

குறிப்பு : $\text{adj}(\text{adj } A) = |A|^{n-2} A = |A|.A$

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & -3 & 4 \\ 2 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 3\begin{vmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= 3(-3+4)+3(2-0)+4(-2-0)$$

$$= 3(1)+6-8=1$$

$$\therefore \text{adj}(\text{adj } A) = 1-A = A = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 4 \\ 2 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

பிடிஏ மாதிரி வினா- விடை

1 மதிப்பெண்

1. A, B என்பன செங்குத்து அணிகள் எனில், $(AB)^T$ (AB) என்பது **[பிடிஏ - 1]**

(1) A (2) B (3) I (4) A^T

[விடை : (3) I]

குறிப்பு :

$$AA^T = A^TA = I$$
$$BB^T = B^TB = I$$
$$(AB)^T(AB) = B^TA^T(AB)$$
$$= B^T(A^TA)B$$
$$= B^T(IB) = I$$

2 மதிப்பெண்கள்

1. $\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ **என்பது செங்குத்து அணி என நிறுவுக.** **[பிடிஏ - 1]**

தீர்வு : $A = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$

எனவே, $A^T = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos^2\theta+\sin^2\theta & \cos\theta\sin\theta-\sin\theta\cos\theta \\ \sin\theta\cos\theta-\cos\theta\sin\theta & \sin^2\theta+\cos^2\theta \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2.$$

இதேபோல் $A^TA = I_2$, எனவே $AA^T = A^TA = I_2$

$\therefore$ A ஆனது செங்குத்து அணியாகும்.

3 மதிப்பெண்கள்

1. $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ \lambda & -2 \end{bmatrix}$ **எனில், $A^2 = \lambda A - 2I$ என்பதை நிறைவு செய்யுமாறு λ -ன் மதிப்பைக் காண்க** **[பிடிஏ - 2]**

தீர்வு :

$$A^2 = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ \lambda & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ \lambda & -2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 9-2\lambda & -6+4 \\ 3\lambda-2\lambda & -2\lambda+4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 9-2\lambda & -2 \\ \lambda & -2\lambda+4 \end{bmatrix}$$

$$\lambda A - 2I = \lambda\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ \lambda & -2 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3\lambda & -2\lambda \\ \lambda^2 & -2\lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3\lambda-2 & -2\lambda \\ \lambda^2 & -2\lambda-2 \end{bmatrix}$$

$$\therefore -2\lambda = -2$$
$$\lambda = 1$$

5 மதிப்பெண்கள்

1. $4x + 3y + 6z = 25$, $x + 5y + 7z = 13$. $2x+9y+z=1$ எனும் சமன்பாடுகளின் தொகுப்பு ஒருங்கமைவு உடையதாக என்பதை ஆராய்க. ஒருங்கமைவு உடையதாயின் அவற்றைத் தீர்க்க. **[பிடிஏ - 1]**

தீர்வு : விரிவுபடுத்தப்பட்ட அணியை ஏறுபடிவ வடிவத்திற்கு உருமாற்றங்கள் செய்யக் கிடைப்பது,

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 3 & 6 & 25 \\ 1 & 5 & 7 & 13 \\ 2 & 9 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{R_1 \to R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 7 & 13 \\ 4 & 3 & 6 & 25 \\ 2 & 9 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[R_3 \to R_3 - 2R_1]{R_2 \to R_2 - 4R_1,} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 7 & 13 \\ 0 & -17 & -22 & -27 \\ 0 & -1 & -13 & -25 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[R_3 \to R_3 \div(-1)]{R_2 \to R_2 \div(-1),} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 7 & 13 \\ 0 & 17 & 22 & 27 \\ 0 & 1 & 13 & 25 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_3 \to 17R_3 - R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 7 & 13 \\ 0 & 17 & 22 & 27 \\ 0 & 0 & 199 & 398 \end{array}\right]$$

ஏறுபடிவத்திலிருந்து கிடைக்கும் சமமான சமன்பாடுகளின் தொகுப்பானது

$x + 5y + 7z = 13,$ … (1)

$17y + 22z = 27,$ … (2)

$199z = 398.$ … (3)

(3), லிருந்து நாம் பெறுவது $z = \frac{398}{199} = 2.$

$z = 2$ என (2)-ல் பிரதியிடக் கிடைப்பது

$y = \frac{27 - 22\times 2}{17} = \frac{-17}{17} = -1$

$z = 2, y = -1$ என (1)-ல் பிரதியிடக் கிடைப்பது

$x = 13 - 5 \times (-1) - 7 \times 2 = 4.$

எனவே தீர்வானது $(x = 4, y = -1, z = 2)$.

குறிப்பு: கடைசி சமன்பாட்டிலிருந்து முதல் சமன்பாட்டிற்கு மேலே உள்ள முறையானது பின்னோக்கி பிரதியிடல் முறை என அழைக்கப்படுகிறது.

2. $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ **என்ற அணிக்கு எளிய உருமாற்றங்கள் மூலம் நேர்மாறு காண்க.**

[பிடிஏ - 6]

விரிவுபடுத்தப்பட்ட அணியின் மீது காஸ்-ஜோர்டான் முறையைப் பயன்படுத்த நமக்குக் கிடைப்பது,

$$[A|I_3] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_{2\to}\frac{1}{2}R_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \left(\frac{1}{2}\right) & \left(\frac{1}{2}\right) & \left(\frac{1}{2}\right) & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[R_3 \to R_3 \to 2R_1]{R_2 \to R_2 \to 3R_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \left(\frac{1}{2}\right) & \left(\frac{1}{2}\right) & \left(\frac{1}{2}\right) & 0 & 0 \\ 3 & \left(\frac{1}{2}\right) & \left(\frac{1}{2}\right) & -\left(\frac{3}{2}\right) & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_2 \to 2R_2} \left[\begin{array}{ccc} 1 & \left(\frac{1}{2}\right) & \left(\frac{1}{2}\right) \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right.$$

$$\xrightarrow{R_2 \to R_1 - \frac{1}{2}R_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[R_2 \to R + R_3]{R_1 \to R_1 - R_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

எனவே , $A\text{–}1 = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -4 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

அரசு தேர்வு வினா- விடை

1 மதிப்பெண்

I. சரியான அல்லது மிகப்பொருத்தமான விடையை தேர்ந்தெடுத்து எழுதுக :

1. $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, **B = adj A மற்றும் C = 3A எனில்,** $\frac{|\text{adj B}|}{|C|} =$ **[அ.மா.வி - 2019]**

(1) a, b, c, d (2) d, b, c, a

(3) c, a, b, d (4) b, a, c, d

[விடை : (2) d, b, c, a**]**

குறிப்பு : நேர்மாறு அணி $= \frac{1}{-5-6}\begin{bmatrix} -5 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$

$= \frac{-1}{11}\begin{bmatrix} -5 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} \frac{5}{11} & \frac{2}{11} \\ \frac{3}{11} & \frac{-1}{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

2. A என்பது செங்குத்து அணி எனில் $|A| =$ **[Qy - 2019]**

(1) 1 (2) –1 (3) ± 1 (4) 0

[விடை : (3) ± 1**]**

குறிப்பு : செங்கோண அணி அணி கோவை மதிப்பு 1 அல்லது –1.

3. $x + y + z = 2, 2x + y - z = 3, 3x + 2y + kz = 4$ என்ற சமன்பாடுகளின் தொகுப்பானது ஒரே ஒரு தீர்வைப் பெற்றிருக்கும் எனில் **[Qy - 2019]**

(1) $k \neq 0$ (2) $-1 < k < 1$

(3) $-2 < k < 2$ (4) $k = 0$

[விடை : (1) $k \neq 0$]

குறிப்பு : $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & k \end{vmatrix} \neq 0$

$\Rightarrow 1[k + 2] - 1[2k + 3] + 1\,[4 - 3] \neq 0$

$\Rightarrow k + 2 - 2k - 3 + 1 \neq 0$

$\Rightarrow -k + 0 \neq 0 \Rightarrow k \neq 0$

2 மதிப்பெண்கள்

1. **பின்வரும் நேரியல் சமன்பாடுகள் தொகுப்பை கிராமரின் விதி கொண்டு தீர்க்க.**
$2x - y = 3, x + 2y = -1$. **[அ.மா.வி - 2019]**

தீர்வு :

$$2x - y = 3$$
$$x + 2y = -1$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \times 2 - (-1)(-1) = 4 + 1 = 5$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \times 2 - 1\,(-1) \times -1 = 6 - 1 = 5$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 - 3 = -5$$

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{5}{5} = 1$$

$$y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-5}{5} = -1$$

2. **adj A =** $\begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ **எனில் A^{-1}-ஐக் காண்க.** **[Qy - 2019]**

தீர்வு :

$$|\text{adj A}| = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 9$$

எனவே $A^{-1} = \pm \dfrac{1}{\sqrt{|adj\ A|}}$ adj (A)

$$= \pm \frac{1}{\sqrt{9}} \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \pm \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

5 மதிப்பெண்கள்

1. **காஸ்ஸியன் நீக்கல் முறையைப் பயன்படுத்தி பின்வரும் வேதியல் எதிர்வினைச் சமன்பாட்டை சமநிலைப்படுத்துக: $C_5H_8 + O_2 \rightarrow CO_2 + H_2O$** **[Qy - 2019]**

தீர்வு : நாம் x_1, x_2, x_3 மற்றும் x_4 என்ற மிகை முழுக்களை

$$x_1\,C_5\,H_8 + x_2O_2 = x_3CO_2 + x_2H_2O$$

(1) -ன் இடதுபுறத்திலுள்ள கார்பன் அணுக்களின் எண்ணிக்கை (1)-ன் வலதுபுறத்திலுள்ள கார்பன் அணுக்களின் எண்ணிக்கைக்குச் சமமாக இருக்க வேண்டும். எனவே,

$$5x_1 = x_3$$
$$\Rightarrow \quad 5x_1 - x_3 = 0$$

என்ற நேரியச் சமப்படித்தான சமன்பாட்டை பெறுகிறோம். இதேபோல் ஹைட்ரஜன் மற்றும் ஆக்ஸிஜன் அணுக்கள் எண்ணிக்கைகளை ஒப்பிடக் கிடைப்பது,

$$8x_1 = 2x_4$$
$$\Rightarrow \quad 4x_1 - x_4 = 0,$$
$$2x_1 = 2x_3 + x_4$$
$$\Rightarrow \quad 2x_2 - 2x_3 - x_3 = 0.$$

சமன்பாடுகள் (2), (3), மற்றும் (4) என்பன 4 மாறிலிகளில் ஒரு நேரியச் சமன்படித்தான தொகுப்பை ஏற்படுத்துகின்றன.

விரிவுப்படுத்தப்பட்ட அணியானது,

$$[A|B] = \left[\begin{array}{cccc|c} 5 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & -1 & 0 \end{array}\right]$$

காஸ்ஸியன் நீக்கல் முறையை பயன்படுத்த,

$$[A|B] \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 4 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 5 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & -1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_3} \left[\begin{array}{cccc|c} 4 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & -1 & 0 \\ 5 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_3 \rightarrow 4R_3 - 5R_1} \left[\begin{array}{cccc|c} 4 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 5 & 0 \end{array}\right]$$

எனவே, $\rho(A) = \rho\,([A|B]) = 3 < 4 =$ மதிப்பிட வேண்டிய மாறிகளின் எண்ணிக்கை.

தொகுப்பானது ஒருங்கமைவு உடையது மற்றும் எண்ணற்ற தீர்வுகளைப் பெற்றிருக்கும்.

ஏறுபடி வடிவத்தில் நமக்குக் கிடைக்கும் சமான சமன்பாடுகள் $4x_1 - x_4 = 0$, $2x_2 - 2x_3 - x_4 = 0$, $-4x + 5x_4 = 0$.

எனவே ஒரு மாறியை பூச்சியமற்ற மெய் எண் பெறும் தன்னிச்சை மாறியாக எடுத்துக் கொள்ள வேண்டும்.

$x_4 = t, t$ 0 என்க. பின்னோக்கி பிரதியிடல் முறையில் $x_3 = \frac{5t}{4}, x_2 = \frac{7t}{4}, x_1 = \frac{t}{4}$ எனப் பெறுகிறோம்.

x_1, x_2, x_3 மற்றும் x_4 என்பன மிகை முழுக்கள். எனவே $t = 4$ எனத் தேர்வு செய்கிறோம். எனவே, $x_1 = 1, x_2 = 7, x_3 = 5$ மற்றும் $x_4 = 4$ எனக் கிடைக்கிறது.

எனவே சமனாக்கப்பட்டச் சமன்பாடு

$C_5H_8 + 7O_2 \rightarrow 5CO_2 + 4H_2O$ ஆகும்.

கூடுதல் வினா - விடை

1 மதிப்பெண்

I. கொடுக்கப்பட்ட நான்கு விடைகளிலிருந்து சரியான அல்லது மிகப் பொருத்தமான விடையைத் தேர்ந்தெடுக்க.

1. சமன்பாடுகளின் தொகுப்பு $x + y + z = 6$, $x + 2y + 3z = 14$ மற்றும் $2x + 5y + \lambda z = \mu$ $(\lambda, \mu \in \mathbb{R})$ ஒருங்கமைவுடன் ஒரே தீர்வை கொண்டிருக்க வேண்டும் எனில்

(1) $\lambda = 8$ (2) $\lambda = 8, \mu \neq 36$

(3) $\lambda \neq 8$ (4) இவற்றில் எதுவுமில்லை

[விடை : (3) $\lambda \neq 8$]

குறிப்பு : $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 14 \\ 2 & 5 & \lambda & \mu \end{array}\right] \xrightarrow[R_3 \to R_3 - 2R_1]{R_1 \to R_2 - R_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & 3 & \lambda-2 & \mu-12 \end{array}\right]$

$$\xrightarrow{R_3 \to R_3 - 3R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & \lambda-8 & \mu-36 \end{array}\right]$$

2. $x = cy + bz$, $y = az + cx$ மற்றும் $z = bx + ay$ என்ற சமன்பாட்டு தொகுப்பு வெளிப்படையற்ற தீர்வை கொண்டிருக்கும் எனில் ....

(1) $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ (2) $abc \neq 1$

(3) $a + b + c = 0$ (4) $a^2 + b^2 + c^2 + 2abc = 1$

[விடை : (4) $a^2 + b^2 + c^2 + 2abc = 1$]

குறிப்பு : $\begin{vmatrix} 1 & -c & -b \\ c & -1 & a \\ b & a & -1 \end{vmatrix} = 0$

$\Rightarrow 1[1 - a^2] + c[-c - ab] - b[ac + b] = 0$

$\Rightarrow 1 - a^2 - c^2 - abc - abc - b^2 = 0$

3. A ஒரு 3×3 அணி மற்றும் B ஒரு சேர்ப்பு அணி $|B| = 64$ எனில் $|A| =$

(1) ± 2 (2) ± 4 (3) ± 8 (4) ± 12

[விடை : (3) ± 8]

குறிப்பு : $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{adj } A = \frac{1}{|A|} B$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad |A| A^{-1} &= B \\ \Rightarrow \quad |A|^3 |A^{-1}| &= |B| = 64 \\ \Rightarrow \quad |A|^2 &= 64 \\ \Rightarrow \quad |A| &= \pm 8 \end{aligned}$$

4. A^T ஆனது சதுர அணி Aயின் நிரை நிரல் மாற்று எனில்

(1) $|A| \neq |A^T|$ (2) $|A| = |A^T|$

(3) $|A| + |A^T| = 0$

(4) A ஒரு சமச்சீர் அணி எனில் மட்டும் $|A| = |A^T|$

[விடை : (2) $|A| = |A^T|$]

5. $2x + y = 4$, $x - 2y = 2$, $3x + 5y = 6$ என்ற சமன்பாட்டு தொகுப்பிற்கான தீர்வுகளின் எண்ணிக்கை

(1) 0 (2) 1

(3) 2 (4) எண்ணிலடங்காதது

[விடை : (2) 1]

குறிப்பு : $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 5 & 6 \end{array}\right] \xrightarrow[R_3 \to R_3 - 3R_2]{R_2 \to R_2 - 2R_1} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 11 & 0 \end{array}\right]$

$$\xrightarrow{R_3 \to R_3 - \frac{11}{5} R_2} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

6. $|A| = 2$ எனுமாறு A ஒரு சதுர அணி, எந்த ஒரு மிகை முழு nக்கும் $|A^n| =$..............

(1) 0 (2) $2n$ (3) 2^n (4) n^2

[விடை : (3) 2^n]

குறிப்பு : $|A^n| = |A|\,|A| \ldots$ முறைகள்

$= (2)(2) \ldots$ முறைகள் $= 2^n$

7. A வரிசை n உடைய சதுர அணி எனில், $|\text{adj } A| =$ ....

(1) $|A|^{n-1}$ (2) $|A|^{n-2}$

(3) $|A|^n$ (4) எதுவுமில்லை

[விடை : (1) $|A|^{n-1}$]

குறிப்பு : $\text{adj } A = |A| A^{-1}$

$\Rightarrow \quad |\text{adj } A| = |A|^n |A^{-1}| = |A|^{n-1}$

8. சமன்பாடுகளின் தொகுப்பு $x + 2y - 3x = 2$, $(k + 3)\ z = 3$, $(2k + 1)\ y + z = 2$ ஒருங்கமைவு அற்றது எனில் k ஆனது

(1) $-3, -\frac{1}{2}$ (2) $-\frac{1}{2}$ (3) 1 (4) 2

[விடை : $(1) -3, -\frac{1}{2}$**]**

9. $A = \begin{pmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{pmatrix}$ மற்றும் $A\ (\text{adj } A) = \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ எனில் λ ஆனது

(1) $\sin x \cos x$ (2) 1

(3) 2 (4) எதுவுமில்லை

[விடை : (2) 1**]**

குறிப்பு : $A\ (\text{adj } A) = \begin{pmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

10. A $m \times n$ வரிசையுடைய அணி எனில் $\rho(A)$ ....

(1) m (2) n

(3) $\leq (m,n)$- ன் மீச்சிறு

(4) $\geq (m,n)$- ன் மீச்சிறு

[விடை : (3) $\leq (m,n)$- ன் மீச்சிறு**]**

11. $x + 2y + 3z = 1$, $x - y + 4z = 0$, $2x + y + 7z = 1$ என்ற தொகுப்பிற்கு........

(1) ஒரே தீர்வு (2) இரண்டு தீர்வுகள்

(3) தீர்வு இல்லை

(4) எண்ணிக்கையற்ற தீர்வுகள்

[விடை : (4) எண்ணிக்கையற்ற தீர்வுகள்**]**

குறிப்பு : $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 7 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[R_3 \to R_3 - 2R_1]{R_2 \to R_2 - R_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 1 & -1 \end{array}\right]$

$\xrightarrow{R_3 \to R_3 - R_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$

12. $\rho(A) = \rho([A/B])$ = மதிப்பிட வேண்டிய மாறிகளின் எண்ணிக்கை, அத்தொகுப்பானது ....

(1) ஒருங்கமைவுடன் எண்ணிக்கையற்ற தீர்வுகளை கொண்டிருக்கும்

(2) ஒருங்கமைவுடையது

(3) ஒருங்கமைவற்றது

(4) ஒருங்கமைவுடன் ஒரே ஒரு தீர்வை கொண்டிருக்கும்.

[விடை : (4) ஒருங்கமைவுடன் ஒரே ஒரு தீர்வை கொண்டிருக்கும்**]**

13. பின்வருவனவற்றுள் தொடக்கநிலை உருமாற்றம் இல்லாதது எது?

(1) $R_i \leftrightarrow R_j$ (2) $R_i \to 2R_i + R_j$

(3) $C_j \to C_j + C_i$ (4) $R_i \to R_i + C_j$

[விடை : (4) $R_i \to R_i + C_j$**]**

14. $\rho(A) = r$ எனில் பின்வருவனவற்றுள் சரியானது எது?

(1) எல்லா n வரிசை சிற்றணிக்கோவையும் பூச்சியமாவதில்லை

(2) 'A' -ல் குறைந்தபட்சம் ஒரு r வரிசையுடைய பூச்சியமற்ற சிற்றணிக்கோவையாவது இடம் பெற்றிருத்தல் வேண்டும் மற்றும் அதைவிட அதிகமான வரிசை கொண்ட சிற்றணிக் கோவைகளின் மதிப்புகள் பூச்சிங்களாகயிருத்தல் வேண்டும்.

(3) 'A'-ல் குறைந்தபட்சம் ஒரு $(r+1)$ வரிசையுடைய சிற்றணிக்கோவையானது பூச்சியமாயிருத்தல் வேண்டும்.

(4) எல்லா $(r+1)$ வரிசைமற்றும் அதைவிட அதிகமான வரிசை கொண்ட சிற்றணிக் கோவைகளின் மதிப்புகள் பூச்சியங்களாகயிருத்தல் கூடாது.

[விடை : (2) 'A' -ல் குறைந்தபட்சம் ஒரு r வரிசையுடைய பூச்சியமற்ற சிற்றணிக்கோவையாவது இடம் பெற்றிருத்தல் வேண்டும் மற்றும் அதைவிட அதிகமான வரிசை கொண்ட சிற்றணிக் கோவைகளின் மதிப்புகள் பூச்சிங்களாகியிருத்தல் வேண்டும்.**]**

II. கோடிட்ட இடங்களை நிரப்புக :

1. ஒவ்வொரு சமபடித்தான தொகுப்பும் ....

(1) எப்பொழுதும் ஒருங்கமைவு உடையது

(2) வெளிப்படை தீர்வு மட்டுமே இருக்கும்

(3) எண்ணிக்கையற்ற தீர்வுகளை கொண்டிருக்கும்

(4) ஒருங்கமைவுடன் இருக்க தேவையில்லை

[விடை : (1) எப்பொழுதும் ஒருங்கமைவு உடையது**]**

2. $\rho(A) \neq \rho([A|B])$, எனில் தொகுப்பானது ....

(1) ஒருங்கமைவுடன் எண்ணிக்கையற்ற தீர்வுகளை கொண்டிருக்கும்

(2) ஒருங்கமைவுடன் ஒரே ஒரு தீர்வை கொண்டிருக்கும்

(3) ஒருங்கமைவுடையது

(4) ஒருங்கமைவற்றது

[விடை : (4) ஒருங்கமைவற்றது**]**

3. 3 மாறிகளை உடைய அசமபடித்தான நேரியச் சமன்பாடுகளின் தொகுப்பிற்கு $\rho(A) = \rho([A|B]) = 2$, எனில் தொகுப்பிற்கு.............

(1) ஒரே ஒரு தீர்வு

(2) ஒரு சாராமாறிக் குடும்பமாக தீர்வுகள் இருக்கும்

(3) இரு சாராமாறிக் குடும்பமாக தீர்வுகள் இருக்கும்

(4) ஒருங்கமைவற்றது

[விடை : (2) ஒரு சாராமாறிக் குடும்பமாக தீர்வுகள் இருக்கும்**]**

4. கிராமரின் விதியை பயன்படுத்த வேண்டுமெனில் ....

(1) $\Delta \neq 0$ (2) $\Delta = 0$

(3) $\Delta = 0, \Delta_x = 0$ (4) $\Delta_x = \Delta_y = \Delta_z = 0$

[விடை : (1) $\Delta \neq 0$**]**

5. ஒரு சமப்படித்தான தொகுப்பில் $\rho(A) = \rho([A|0])$ < மாறிகளின் எண்ணிக்கையெனில் தொகுப்பு கொண்டிருப்பது.............

(1) வெளிப்படை தீர்வு

(2) வெளிப்படையற்ற தீர்வுகள் மட்டும்

(3) தீர்வு இல்லை

(4) வெளிப்படை தீர்வு மற்றும் எண்ணிக்கையற்ற தீர்வுகள் **[விடை :** (4) வெளிப்படை தீர்வு மற்றும் எண்ணிக்கையற்ற தீர்வுகள்**]**

6. 3 மாறிகளை உடைய சமன்பாடுகளின் தொகுப்பில், $\Delta = 0$ மற்றும் Δ_x, Δ_y அல்லது Δ_z ல் ஒன்று பூச்சியமில்லையெனில் தொகுப்பானது ....

(1) ஒருங்கமைவுடையது

(2) ஒருங்கமைவற்றது

(3) ஒருங்கமைவுடன் தீர்வுகள் இரு சாராமாறிக் குடும்பமாக இருக்கும்

(4) ஒருங்கமைவுடன் தீர்வுகள் ஒரு சாரா மாறிக் குடும்பமாக இருக்கும்.

[விடை : (2) ஒருங்கமைவற்றது**]**

7. மூன்று மாறிகளில் அமைந்த நேரியச் சமன்பாட்டு தொகுப்பிற்கு $\rho(A) = \rho([A|B]) = 1$, எனில் தொகுப்பிற்கு ....

(1) ஒரே தீர்வு

(2) ஒருங்கமைவற்றது

(3) ஒருங்கமைவுடன் தீர்வுகள் இரு சாராமாறிக் குடும்பமாக இருக்கும்

(4) ஒருங்கமைவுடன் தீர்வுகள் ஒரு சாராமாறிக் குடும்பமாக இருக்கும்

[விடை : (3) ஒருங்கமைவுடன் தீர்வுகள் இரு சாராமாறிக் குடும்பமாக இருக்கும்**]**

8. $A = [2\ 0\ 1]$ எனில் AA^T -ன் தரம் ....

(1) 1 (2) 2 (3) 3 (4) 0

[விடை : (1) 1**]**

குறிப்பு : $AA^T = [2\ 0\ 1]\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = [5] \quad \therefore (AA^T) = 1$

9. A ஒரு பூச்சியமற்ற கோவை அணி எனில் $|A^{-1}|$=

(1) $\left|\frac{1}{A^2}\right|$ (2) $\frac{1}{|A|^2}$ (3) $\left|\frac{1}{A}\right|$ (4) $\frac{1}{|A|}$

[விடை : (4) $\frac{1}{|A|}$**]**

10. சதுர அணியின் உறுப்பு a_{ij} -ன் சிற்றணிக் கோவை M_{ij} மற்றும் இணைக்காரணி A_{ij} ஐ தொடர்புபடுத்துவது ....

(1) $A_{ij} = -M_{ij}$ (2) $A_{ij} = M_{ij}$

(3) $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ (4) $A_{ij} = (-1)^{i-j} M_{ij}$

[விடை : (3) $A_{ij} = (-1)^{i+j} m_{ij}$**]**

III. பொருத்துக :

1.

	பட்டியல் - I		பட்டியல் - II
i.	$AX = 0$ -ன் வெளிப்படை தீர்வு	அ)	$\|A\| = 0$
ii.	$AX = 0$ -ன் வெளிப்படை யற்ற தீர்வு	ஆ)	வெளிப்படை யற்ற தீர்வுகள்
iii.	$\rho(A) = \rho[(A/0)] < n$	இ)	வெளிப்படை தீர்வு
iv.	$\rho(A) = \rho([A/0]) = n$	ஈ)	$\|A\| \neq 0$

சரியான பொருத்தமானது

	(i)	(ii)	(iii)	(iv)
(1)	அ	ஆ	இ	ஈ
(2)	ஆ	இ	ஈ	அ
(3)	அ	ஈ	ஆ	அ
(4)	இ	ஈ	அ	ஆ

[விடை : (2) i – ஆ ii – இ iii – ஈ iv – அ**]**

2.

	பட்டியல் - I		பட்டியல் - II
i.	$\rho(A) = \rho([A\|B]) = 3 =$ மாறிகளின் எண்ணிக்கை	அ)	ஒருங்கமைவுடன் தீர்வுகள் ஒரு சாராமாறிக் குடும்பமாக இருக்கும்
ii.	$\rho(A) = \rho[A\|B]) = 2 <$ மாறிகளின் எண்ணிக்கை	ஆ)	ஒருங்கமைவற்றது மற்றும் தீர்வு இல்லை
iii.	$\rho(A) = \rho[A\|B]) = 1 <$ மாறிகளின் எண்ணிக்கை	இ)	ஒரே தீர்வு
iv.	$\rho(A) \neq \rho([A\|B])$	ஈ)	ஒருங்கமைவுடன் தீர்வுகள் இரு சாராமாறிக் குடும்பமாக இருக்கும்.

சரியான பொருத்தமானது

	(i)	(ii)	(iii)	(iv)
(1)	இ	ஈ	அ	ஆ
(2)	அ	ஆ	ஈ	இ
(3)	இ	அ	ஈ	ஆ
(4)	இ	ஈ	அ	ஆ

[விடை : (3) i – இ ii – அ iii – ஈ iv – ஆ**]**

3. A ஒரு n வரிசையுடைய பூச்சியமற்ற கோவை அணி எனில்

பட்டியல் - I		பட்டியல் - II	
i.	$\|adj\ A\|$	அ)	$\|A\|^{(n-1)^2}$
ii.	$(adj\ A)^T$	ஆ)	$\|A\|^{n-1}$
iii.	$adj\ (adj\ A)$	இ)	$adj\ (A^T)$
iv.	$\|adj\ (adj\ A)\|$	ஈ)	$\|A\|^{n-2} \cdot A$

சரியான பொருத்தமானது

	(i)	(ii)	(iii)	(iv)
(1)	அ	ஆ	இ	ஈ
(2)	இ	ஈ	அ	ஆ
(3)	ஈ	அ	ஆ	இ
(4)	ஆ	இ	ஈ	அ

[விடை : (4) i – ஆ ii – இ iii – ஈ iv – அ]

4. A ஒரு n வரிசையுடைய பூச்சியமற்ற கோவை அணி எனில்

பட்டியல் - I		பட்டியல் - II	
i.	$(adj\ A)^{-1}$	அ)	$(adj\ B)\ (adj\ A)$
ii.	$(\lambda A)^{-1}$	ஆ)	$\lambda^{n-1}\ adj\ (A)$
iii.	$adj\ (\lambda A)$	இ)	$adj\ (A^{-1})$
iv.	$adj\ (AB)$	ஈ)	$\frac{1}{\lambda} A^{-1}$

சரியான பொருத்தமானது

	(i)	(ii)	(iii)	(iv)
(1)	இ	ஈ	ஆ	அ
(2)	அ	ஆ	இ	ஈ
(3)	ஆ	இ	ஈ	அ
(4)	இ	அ	ஆ	ஈ

[விடை : (1) i – இ ii – ஈ iii – ஆ 4 – அ]

5.

பட்டியல் - I		பட்டியல் - II	
i.	$(A^T)^{-1}$	அ)	A
ii.	$A\ (adj\ A)$	ஆ)	$(A^{-1})^T$
iii.	$(AB)^{-1}$	இ)	$\|A\|. I_n$
iv.	$(A^{-1})^{-1}$	ஈ)	$B^{-1} A^{-1}$

சரியான பொருத்தமானது

	(i)	(ii)	(iii)	(iv)
(1)	ஆ	இ	ஈ	அ
(2)	அ	ஆ	இ	ஈ
(3)	இ	ஈ	அ	ஆ
(4)	ஆ	அ	இ	ஈ

[விடை : (1) i – ஆ ii – இ iii – ஈ iv – அ]

IV. பொருத்தமில்லாத ஒன்றை தேர்ந்தெடுக்கவும் :

1. 3 × 4 அணியின் தரம் ....

(1) 1 ஆக இருக்கலாம்
(2) 2 ஆக இருக்கலாம்
(3) 3 ஆக இருக்கலாம்
(4) 4 ஆக இருக்கலாம்

[விடை : (4) 4 ஆக இருக்கலாம்]

குறிப்பு : [$\rho(A) \le (3, 4)$ -ன் மீச்சிறு
$\Rightarrow \rho(A) \le 3$ மேலும் 4 ஆக இருக்க முடியாது]

2. A சமச்சீர் எனில்

(1) $A^T = A$ (2) adj A சமச்சீர்
(3) $adj\ (A^T) = (adj\ A)^T$
(4) A செங்கோண அணி

குறிப்பு : [1, 2, 3 சமச்சீர் அணியின் பண்புகள்]

[விடை : (4) A செங்கோண அணி]

3. A ஒற்றைபடை வரிசையுடைய பூச்சியமற்ற கோவை அணி எனில்

(1) A ன் வரிசை $2m + 1$
(2) A ன் வரிசை $2m + 2$
(3) $|adj\ A|$ மிகை
(4) $|A| \neq 0$ **[விடை :** (2) A ன் வரிசை $2m + 2$]

குறிப்பு : $(2m + 2)$ இரட்டை படை

4. A ஒரு செங்கோண அணி எனில்

(1) $AA^T = A^TA = I$
(2) A ஒரு பூச்சியமற்ற கோவை
(3) $|A| = 0$ (4) $A^{-1} = A^T$

[விடை : (3) $|A| = 0$]

குறிப்பு : $|A| = 0$ என்பது செங்கோணத்திற்கு பொருந்தாது.

5. ஒரு அலகு அணியில் ஒரே ஒரு தொடக்க நிலை உருமாற்றத்தினால் கிடைக்கும் அணியானது

(1) சமனி அணி (2) தொடக்க நிலை அணி
(3) சதுர அணி
(4) சமனி அணிக்கு சமான அணி

[விடை : (1) சமனி அணி]

V. தவறான விடையை தேர்ந்தெடுக்க :

1. ஏறுபடி வடிவலி பின்வருவனவற்றுள் தவறானது எது ?

(1) A–ன் பூச்சிய நிரைகள் அனைத்தும் A–ன் அபூச்சிய நிரைகளுக்கு கீழ் இருக்க வேண்டும்.
(2) ஒவ்வொரு அபூச்சிய நிரையிலும் முதல் பூச்சியமற்ற உறுப்பு 1 ஆகும்.
(3) ஒவ்வொரு நிரையிலும் முதல் பூச்சியமற்ற உறுப்புக்கு முந்தைய பூச்சிய உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை அதற்கு கீழுள்ள நிரைகளில் அம்மாதிரியான பூச்சியங்களின் எண்ணிக்கையை விட குறைவு
(4) இரண்டு நிரைகள் முதல் பூச்சியமற்ற உறுப்புக்கு முன் ஒரே அளவிலான பூச்சியங்களை கொண்டிருக்கும்.

[விடை : (4) இரண்டு நிரைகள் முதல் பூச்சியமற்ற உறுப்புக்கு முன் ஒரே அளவிலான பூச்சியங்களை கொண்டிருக்கும்.]

2. பின்வரும் தொடக்கநிலை உருமாற்றங்கள் பொருந்தாது எது?

(1) $R_i \to R_i + 2R_j$ (2) $C_i \to C_i - C_j$

(3) $R_i \to 7R_i + \frac{5}{3}R_j$ (4) $C_i \to C_i - R_j$

[விடை :(4) $C_i \to C_i - R_j$**]**

3. A ஒரு பூச்சியமற்ற கோவை அணி எனில் பின்வருவனவற்றுள் தவறானது.

(1) $(A^2)^{-1} = (A^{-1})^2$ (2) $|A^{-1}| = |A|^{-1}$

(3) $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$ (4) $|A| \neq 0$

[விடை : (1) $(A^2)^{-1} = (A^{-1})^2$**]**

4. அணி $\begin{bmatrix} 5 & 10 & 3 \\ -2 & -4 & 6 \\ -1 & -2 & x \end{bmatrix}$ ஒரு பூச்சியக்கோவை அணி எனில் x -ன் மதிப்பானது.

(1) 3

(2) காண இயலாது

(3) x -ன் எல்லா மதிப்புகளுக்கும்

(4) x -ன் ஏதோ ஒரு மதிப்பு **[விடை :** (1) 3**]**

5. சமன்பாடு தொகுப்பிற்கான $2x + y - z = 7$, $x - 3y + 2z = 1$, $x + 3y - 3z = 5$ தீர்வுகளின் எண்ணிக்கை

(1) 0 (2) 3

(3) தீர்வு இல்லை

(4) ஒருங்கமைவற்றது **[விடை :** (2) 3**]**

2 மதிப்பெண்கள்

1. எந்த 2 × 2 அணிக்கும், A (adj A) = $\begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}$ எனில் |A| காண்க.

தீர்வு : கொடுக்கப்பட்ட $A(\text{adj } A) = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix} = 10\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ...(1)

$A(\text{adj } A) = (\text{adj } A)A = |A|.I_2$ என அறிவோம் ...(2)

(1) மற்றும் (2)ஐ ஒப்பிட கிடைப்பது $|A| = 10$.

2. அணி Aக்கு, $A^3 = I$ எனில் A^{-1}காண்க.

தீர்வு : கொடுக்கப்பட்ட $A^3 = I$

முன்புறமாக A^{-1} ல் பெருக்க கிடைப்பது,

$$A^{-1}.A^3 = A^{-1}.I$$

$\Rightarrow (A^{-1}.A)A^2 = A^{-1}$ $[\because A^{-1}I = A^{-1}]$

$\Rightarrow I.A^2 = A^{-1}$ $[\because A^{-1}A = I]$

$\Rightarrow A^2 = A^{-1}$ $[\because I.A^2 = A^2]$

$\therefore A^{-1} = A^2$

3. $A^3 = I$ எனுமாறு A ஒரு சதுர அணி எனில் A ஒரு பூச்சியமற்ற கோவை அணி என நிறுவுக.

தீர்வு : கொடுக்கப்பட்ட $A^3 = I \Rightarrow |A^3| = |I|$

$\Rightarrow |A.A.A| = 1$

$\Rightarrow |A|.|A|.|A| = 1$

$\Rightarrow |A|^3 = 1$

$\therefore |A| \neq 0$

எனவே, A ஒரு பூச்சியமற்ற கோவை அணி

4. சமன்பாடுகளின் தொகுப்பு ஒருங்கமைவற்றது என நிறுவுக. $2x + 5y = 7$, $6x + 15y = 13$.

தீர்வு : விரிவுபடுத்தப்பட்ட அணி

$$[A|B] \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 15 & 13 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2 \to R_2 - 3R_1} \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & -8 \end{array}\right]$$

இங்கு $\rho(A) = 2$ மற்றும் $\rho([A|B]) = 3$

$\therefore \rho(a) \neq \rho([A|B])$

எனவே தொகுப்பு ஒருங்கமைவற்றது.

5. அணி $\begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -15 & 6 & -5 \\ 5 & -2 & 2 \end{bmatrix}$ -ன் தரம் காண்க.

தீர்வு : $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -15 & 6 & -5 \\ 5 & -2 & 2 \end{bmatrix}$ என்க.

இங்கு $|A| = \begin{vmatrix} 6 & -5 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} -15 & -5 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} -15 & 6 \\ 5 & -2 \end{vmatrix}$

$= 3(12 - 10) + 1(-30 + 25) + 1(30 - 30)$

$= 3(2) + 1(-5) + 0 = 6 - 5 = 1 \neq 0$

$\therefore$ A -ன் தரம் என்பது 3.

6. அணி $A = \begin{bmatrix} 4 & 5 & -6 & 1 \\ 7 & -3 & 0 & 8 \end{bmatrix}$ -ன் தரம் காண்க.

தீர்வு : $A = \begin{bmatrix} 4 & 5 & -6 & 1 \\ 7 & -3 & 0 & 8 \end{bmatrix}$

$$\xrightarrow{R_2 \to R_2 - 2R_1} \begin{bmatrix} 4 & 5 & -6 & 1 \\ -1 & -3 & 12 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \begin{bmatrix} -1 & -3 & 12 & 6 \\ 4 & 5 & -6 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_1 + (-1)R_1} \begin{bmatrix} 1 & 13 & -12 & 6 \\ 4 & 5 & -6 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_2 \to R_2 - 4R_1} \begin{bmatrix} 1 & 13 & -12 & -6 \\ 0 & -47 & 42 & 25 \end{bmatrix}$$

சமான ஏறுபடி வடிவ அணியில் இரண்டு அபூச்சிய நிரைகள் உள்ளன.

$\therefore \rho(A) = 2$

7. $3x + y + 9z = 0$, $3x + 2y + 12z = 0$ மற்றும் $2x + y + 7z = 0$ என்ற சமன்பாட்டு தொகுப்பிற்கு வெளிப்படையற்ற தீர்வுகள் உள்ளன என காட்டுக.

தீர்வு : தொகுப்பின், அணி வடிவம்

$$\begin{bmatrix}3 & 1 & 9\\3 & 2 & 12\\2 & 1 & 7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

AX = B இங்கு

$$A = \begin{bmatrix}3 & 1 & 9\\3 & 2 & 12\\2 & 1 & 7\end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix}3 & 1 & 9\\3 & 2 & 12\\2 & 1 & 7\end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix}2 & 12\\1 & 7\end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix}3 & 12\\2 & 7\end{vmatrix} + 9\begin{vmatrix}3 & 2\\2 & 1\end{vmatrix}$$

$= 3(14 - 12) - 1(21 - 24) + 9(3 - 4)$

$= 3(2) - 1(-3) + 9(-1) = 6 + 3 - 9 = 9 - 9 = 0$

$|A| = 0$ எனில், சமபடித்தான சமன்பாடுகளின் தொகுப்பிற்கு வெளிப்படையற்ற தீர்வுகளும் உண்டு.

8. சமன்பாடுகள் $x + 2y + 2z = 0$, $x - 3y - 3z = 0$, $2x + y + kz = 0$ தொகுப்பிற்கு வெளிப்படையான தீர்வு மட்டுமே உண்டு எனில் k-ன் மதிப்பு காண்க.

தீர்வு : கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டு தொகுப்பிற்கான அணி வடிவம்

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & 2\\1 & -3 & -3\\2 & 1 & k\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$AX = B \text{ இங்கு } A = \begin{bmatrix}1 & 2 & 2\\1 & -3 & -3\\2 & 1 & k\end{bmatrix}$$

சமபடித்தான சமன்பாடுகளின் தொகுப்பிற்கு வெளிப்படையான தீர்வுகள் மட்டுமே உண்டெனில் $|A| \neq 0$.

$$\therefore \begin{vmatrix}1 & 2 & 2\\1 & -3 & -3\\2 & 1 & k\end{vmatrix} \neq 0.$$

R_1 மூலம் விரிவுபடுத்த,

$$1\begin{vmatrix}-3 & -3\\1 & k\end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix}1 & -3\\2 & k\end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix}1 & -3\\2 & 1\end{vmatrix} \neq 0.$$

$\Rightarrow 1(-3k + 3) - 2(k + 6) + 2(1 + 6) \neq 0$

$\Rightarrow -3k + 3 - 2k - 12 + 14 \neq 0 \Rightarrow -5k + 5 \neq 0$

$\Rightarrow -5k \neq -5 \Rightarrow k \neq \dfrac{-5}{-5} = 1$

$\Rightarrow k \neq 1$

9. தீர்க்க : $2x - y = 3$, $5x + y = 4$ அணிகளை பயன்படுத்தி.

தீர்வு : சமன்பாடுகளை அணி வடிவத்தில் பின்வருமாறு எழுதலாம்.

$$\begin{pmatrix}2 & -1\\5 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix} \Rightarrow AX = B \text{ இங்கு}$$

$$A = \begin{pmatrix}2 & -1\\5 & 1\end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$$

$\therefore X = A^{-1}B$

$$|A| = \begin{vmatrix}2 & -1\\5 & 1\end{vmatrix} = 2 + 5 = 7 \neq 0$$

$$\therefore A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{ adj } A = \frac{1}{7}\begin{bmatrix}1 & 1\\-5 & 2\end{bmatrix}$$

$$\therefore X = \frac{1}{7}\begin{bmatrix}1 & 1\\-5 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix} = \frac{1}{7}\begin{bmatrix}3+4\\-15+8\end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{7}\begin{bmatrix}7\\-7\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$$

$\therefore$ தீர்வு கணம் $\{1, -1\}$

10. தீர்க்க : $6x - 7y = 16$, $9x - 5y = 35$ (கிராமரின் விதியை பயன்படுத்த).

தீர்வு :

$$\Delta = \begin{vmatrix}6 & -7\\9 & -5\end{vmatrix} = -30 + 63 = 33$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix}16 & -7\\35 & -5\end{vmatrix} = -80 + 245 = 165$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix}6 & 16\\9 & 35\end{vmatrix} = 210 - 144 = 66$$

$$\therefore x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{165}{33} = 5$$

$$y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{66}{33} = 2$$

$\therefore$ தீர்வு கணம் $\{5, 2\}$

3 மதிப்பெண்கள்

1. தீர்க்க : $2x + 3y = 10$, $x + 6y = 4$, கிராமரின் விதியை பயன்படுத்துக.

தீர்வு :

$$\Delta = \begin{vmatrix}2 & 3\\1 & 6\end{vmatrix} = 12 - 3 = 9 \neq 0$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix}10 & 3\\4 & 6\end{vmatrix} = 60 - 12 = 48$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix}2 & 10\\1 & 4\end{vmatrix} = 8 - 10 = -2$$

$$\therefore x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{48}{9} = \frac{16}{3}$$

$$y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-2}{9}$$

$\therefore$ தீர்வு கணம் $\left\{\frac{16}{3}, \frac{-2}{9}\right\}$

2. t -ன் எம்மதிப்புக்க சமன்பாட்டு தொகுப்பானது $tx + 3y - z = 1,\ x + 2y + z = 2, - tx + y + 2z = - 1$ ஒரே ஒரு தீர்வை கொண்டிருக்காது?

தீர்வு : $\Delta = \begin{vmatrix} t & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -t & 1 & 2 \end{vmatrix} = t\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -t & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -t & 1 \end{vmatrix}$

$= t(4-1) - 3(2+t) - 1(1+2t)$

$= 3t - 6 - 3t - 1 - 2t = -7 - 2t$

தொகுப்பானது ஒரே ஒரு தீர்வை கொண்டிருக்க இயலாது எனில்

$\Delta = 0 \Rightarrow -7 - 2t = 0 \Rightarrow -2t = 7 \Rightarrow t = \frac{-7}{2}$

$\therefore t = \frac{-7}{2}$.

3. தீர்க்க : $3x + ay = 4,\ 2x + ay = 2,\ a \neq 0$ கிராமரின் விதியை பயன்படுத்தி

தீர்வு : $\Delta = \begin{vmatrix} 3 & a \\ 2 & a \end{vmatrix} = 3a - 2a = a$

$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 4 & a \\ 2 & a \end{vmatrix} = 4a - 2a = 2a$

$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 6 - 8 = -2$

$\therefore x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{2\cancel{a}}{\cancel{a}} = 2\ ;\ y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-2}{a}$

$\therefore$ தீர்வு கணம் $\{2, \frac{-2}{a}\}$

4. $(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$ சரிபார்க்க $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$ மற்றும் $B = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$.

தீர்வு : $AB = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8+3 & 10+4 \\ 20+9 & 25+12 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 11 & 14 \\ 29 & 37 \end{bmatrix}$

$|AB| = \begin{bmatrix} 11 & 14 \\ 29 & 37 \end{bmatrix}$

$= 407 - 406 = 1 \neq 0$

$(AB)^{-1} = \frac{1}{|AB|} \text{adj}(AB)$

$= \frac{1}{1}\begin{bmatrix} 11 & 14 \\ 29 & 37 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 37 & -14 \\ -29 & 11 \end{bmatrix}$ ...(1)

$|A| = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} = 6 - 5 = 1$

$|B| = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = 16 - 15 = 1$

$B^{-1} = \frac{1}{|B|} \text{adj } B = \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$

$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{adj } A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$

$\therefore B^{-1}A^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 12+25 & -4-10 \\ -9-20 & 3+8 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 37 & -14 \\ -29 & 11 \end{bmatrix}$ ...(2)

(1) மற்றும் (2) விருந்து, $(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$

5. எந்த நிபந்தனையின் கீழ் அணி $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & h-2 & 2 \\ 0 & 0 & h+2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ இன் தரம் 3ஐ விட குறைவாக இருக்கும்?

தீர்வு : $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & h-2 & 2 \\ 0 & 0 & h+2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ என்க

A ன் தரம் 3 விட குறைவாக இருக்க வேண்டுமெனில் ஒவ்வொரு 3 வரிசையுடைய சிற்றணிக்கோவையும் பூச்சியமாக இருத்தல் வேண்டும்.

$\therefore \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & h-2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 0$

$\Rightarrow 1\begin{vmatrix} h-2 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} + 0 + 0 = 0 \Rightarrow 3(h-2) = 0$

$\Rightarrow h - 2 = 0 \Rightarrow h = 2.$

6. அணியின் தரம் காண்க $\begin{bmatrix} 4 & 4 & 0 & 3 \\ -2 & 3 & -1 & 5 \\ 1 & 4 & 8 & 7 \end{bmatrix}$.

தீர்வு : $A = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 0 & 3 \\ -2 & 3 & -1 & 5 \\ 1 & 4 & 8 & 7 \end{bmatrix}$ என்க.

$$A \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_3} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 8 & 7 \\ -2 & 3 & -1 & 5 \\ 4 & 4 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[R_3 \to R_3 - 4R_1]{R_2 \to R_2 + 2R_1} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 8 & 7 \\ 0 & 11 & 15 & 19 \\ 0 & -12 & -32 & -25 \end{bmatrix}$$

A ஏறுபடி வடிவில் உள்ளது மற்றும் 3 அபூச்சிய நிரைகள் உள்ளன.

$\therefore \rho(A) = 3.$

7. $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$ சரிபார்க்க $A = \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 5 & -6 \end{bmatrix}$.

தீர்வு :

$$|A| = \begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 5 & -6 \end{vmatrix} = 12 + 15 = 27$$

$$\therefore A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{ adj } A = \frac{1}{27}\begin{bmatrix} -6 & 3 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$$

$$(A^{-1})^T = \frac{1}{27}\begin{bmatrix} -6 & -5 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \quad ...(1)$$

$$A^T = \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ -3 & -6 \end{bmatrix}$$

$$|A^T| = \begin{vmatrix} -2 & 5 \\ -3 & -6 \end{vmatrix} = 12 + 15 = 27$$

$$\therefore (A^T)^{-1} = \frac{1}{|A^T|} \text{ adj}(A^T) = \frac{1}{27}\begin{bmatrix} -6 & -5 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \quad ...(2)$$

(1) மற்றும் (2) லிருந்து, $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$

8. தீர்க்க : $2x - 3y = 7$, $4x - 6y = 14$, காஸ் - ஜோர்டன் முறை மூலம்.

தீர்வு : சமன்பாட்டு தொகுப்பின் அணி வடிவம்

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 14 \end{bmatrix} \Rightarrow AX = B \text{ இங்கு}$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -6 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \text{ மற்றும் } B = \begin{bmatrix} 7 \\ 14 \end{bmatrix}$$

விரிவுபடுத்தப்பட்ட அணியை ஏறுபடி வடிவில் உருமாற்ற கிடைப்பது

$$[A|B] = \left[\begin{array}{cc|c} 2 & -3 & 7 \\ 4 & -6 & 14 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2 \to R_2 - 2R_1} \left[\begin{array}{cc|c} 2 & -3 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

இங்கு $\rho(A) = 1$, $\rho[A|B] = 1$

$\therefore \rho(A) = \rho[A|B] = 1 <$ மாறிகளின் எண்ணிக்கை, தொகுப்பு ஒருங்கமைவுடையது மற்றும் ஒரு சாராமாறிக் குடும்பமாக தீர்வுகள் இருக்கும்.

$\therefore y = t$, என பிரதியிட, இங்கு $t \in \mathbb{R}$

ஏறுபடி வடிவத்தை சமன்பாடுகளாக எழுத கிடைப்பது

$$\begin{aligned} 2x - 3y &= 7 \\ \therefore 2x - 3t &= 7 \\ \Rightarrow \quad 2x &= 7 + 3t \\ \Rightarrow \quad x &= \frac{1}{2}(7 + 3t) \end{aligned}$$

$\therefore$ தீர்வு கணம் $\{\frac{1}{2}(7 + 3t), t\}$ இங்கு $t \in \mathbb{R}$.

9. தீர்க்க : $x + y + 3z = 4$, $2x + 2y + 6z = 7$, $2x + y + z = 10$.

தீர்வு : விரிவுபடுத்தப்பட்ட அணி $[A|B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 6 & 7 \\ 2 & 1 & 1 & 10 \end{array}\right]$

$$[A|B] \xrightarrow[R_3 \to R_3 - 2R_1]{R_2 \to R_2 - 2R_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -5 & 2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right]$$

இங்கு $\rho(A) = 2$ [2 அபூச்சிய நிரைகள் மட்டும்]

மற்றும் $\rho([A|B]) = 3$ [3 அபூச்சிய நிரைகள் மட்டும்]

$\therefore \rho(A) \neq \rho([A|B])$

$\therefore$ தொகுப்பு ஒருங்கமைவற்றது.

10. அணியின் தரம் 2 எனில் $\begin{bmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ -1 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$, λ-ன் மதிப்பு காண்க.

தீர்வு : கொடுக்கப்பட்ட $\begin{bmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ -1 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$ தரம் என்பது 2

$\Rightarrow$ மூன்றாம் வரிசை அணியின் தரம் பூச்சியம்

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ -1 & 0 & \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \lambda \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ 0 & \lambda \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & \lambda \end{vmatrix} + 0 = 0$$

$$\Rightarrow \lambda(\lambda^2 - 0) + 1(0-1) = 0$$

$$\Rightarrow \lambda^3 - 1 = 0 \Rightarrow \lambda^3 = 1 \Rightarrow \lambda = 1$$

$$\therefore \lambda = 1$$

5 மதிப்பெண்கள்

1. அணிக்கோவையை பயன்படுத்தி, $f(1) = 0$, $f(2) = -2$ மற்றும் $f(3) = -6$ எனில் $f(x) = ax^2 + bx + c$, என்ற ஈருறுப்பு கோவையை காண்க.

தீர்வு : கொடுக்கப்பட்ட $f(x) = ax^2 + bx + c$

$$f(1) = 0$$

$$\Rightarrow a(1)^2 + b(1) + c = 0$$

$$\Rightarrow a + b + c = 0 \quad ...(1)$$

$$f(2) = -2$$

$$\Rightarrow a(2^2) + b(2) + c = -2$$

$$\Rightarrow 4a + 2b + c = -2 \quad ...(2)$$

$$f(3) = -6$$

$$\Rightarrow a(3^2) + b(3) + c = -6$$

$$\Rightarrow 9a + 3b + c = -6 \quad ...(3)$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 9 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 9 & 1 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 9 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 1(2-3) - 1(4-9) + 1(12-18)$$

$$= -1 + 5 - 6 = -2 \neq 0$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \\ -6 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0 - 1\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -6 & 1 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ -6 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= -1(-2+6) + 1(-6+12) = -1(4) + 1(6) = 2$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 4 & -2 & 1 \\ 9 & -6 & 1 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -6 & 1 \end{vmatrix} + 0 + 1\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 9 & -6 \end{vmatrix}$$

$$-1(-2+6) + 1(-24+18) = 4 - 6 = -2$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & -2 \\ 9 & 3 & -6 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 3 & -6 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 9 & -6 \end{vmatrix}$$

$$= 1(-12+6) - 1(-24+18) = -6 + 6 = 0$$

$\therefore$ கிராமரின் விதியை பயன்படுத்தி,

$$a = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{2}{-2} = -1$$

$$b = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-2}{-2} = 1$$

$$c = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{0}{-2} = 0$$

$$\therefore f(x) = (-1)x^2 + 1x + 0$$

$$\Rightarrow f(x) = x^2 + x$$

2. தீர்க்க :

$$\frac{2}{x} + \frac{3}{y} + \frac{10}{z} = 4, \ \frac{4}{x} - \frac{6}{y} + \frac{5}{z} = 1, \ \frac{6}{x} + \frac{9}{y} - \frac{20}{z} = 2$$

தீர்வு : $\frac{1}{x} = a, \ \frac{1}{y} = b, \ \frac{1}{z} = c$

எனக் கொடுக்கப்பட்டால்

$$\therefore 2a + 3b + 10c = 4 \quad ...(1)$$

$$4a - 6b + 5c = 1 \quad ...(2)$$

$$6a + 9b - 20c = 2 \quad ...(3)$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 10 \\ 4 & -6 & 5 \\ 6 & 9 & -20 \end{vmatrix}$$

$$= 2\begin{vmatrix} -6 & 5 \\ 9 & -20 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 6 & -20 \end{vmatrix} + 10\begin{vmatrix} 4 & -6 \\ 6 & 9 \end{vmatrix}$$

$$= 2(120-45) - 3(-80-30) + 10(36+36)$$

$$= 150 + 330 + 720 = 1200$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 4 & 3 & 10 \\ 1 & -6 & 5 \\ 2 & 9 & -20 \end{vmatrix}$$

$$= 4\begin{vmatrix} -6 & 5 \\ 9 & -20 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & -20 \end{vmatrix} + 10\begin{vmatrix} 1 & -6 \\ 2 & 9 \end{vmatrix}$$

$$= 4(120-45) - 3(-20-10) + 10(9+12)$$

$$= 300 + 90 + 120 = 600$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 10 \\ 4 & 1 & 5 \\ 6 & 2 & -20 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & -20 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 6 & -20 \end{vmatrix} + 10\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 6 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 2(-2-10) - 4(-80-30) + 10(8-6)$$

$$= -60 + 440 + 20 = 400$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & -6 & 1 \\ 6 & 9 & 2 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} -6 & 1 \\ 9 & 2 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 4 & -6 \\ 6 & 9 \end{vmatrix}$$

$$= 2(-12-9) - 3(8-6) + 4(36+36)$$

$$= -42 - 6 + 288 = 240$$

$$\therefore a = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{600}{1200} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{x} = \frac{1}{2} \Rightarrow x = 2$$

$$\therefore b = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{400}{1200} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{1}{y} = \frac{1}{3} \Rightarrow y = 3$$

$$\therefore c = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{240}{1200} = \frac{1}{5} \Rightarrow \frac{1}{z} = \frac{1}{5} \Rightarrow z = 5$$

$\therefore$ தீர்வு கணம் $\{2, 3, 5\}$

3. மூன்று எண்களின் கூடுதல் 20. மூன்றாவது எண்ணை 2 ஆல் பெருக்கி முதல் எண்ணுடன் கூட்ட கிடைப்பது 23. இரண்டு மற்றும் மூன்றாவது எண்ணை முதல் எண்ணின் மூன்று மடக்குடன் கூட்ட கிடைப்பது 46. கிராமரின் விதியை பயன்படுத்தி எண்களை காண்க.

தீர்வு : தேவையான எண்களை x, y மற்றும் z என்க.

கொடுக்கப்பட்ட தரவின் படி,

$$x + y + z = 20 \quad ...(1)$$

$$2z + x = 23 \Rightarrow x + 2z = 23 \quad ...(2)$$

$$y + z + 3x = 46 \Rightarrow 3x + y + z = 46 \quad ...(3)$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -2 + 5 + 1 = 4$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 20 & 1 & 1 \\ 23 & 0 & 2 \\ 46 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 20\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 23 & 2 \\ 46 & 1 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 23 & 0 \\ 46 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -40 + 69 + 23 = 52$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 20 & 1 \\ 1 & 23 & 2 \\ 3 & 46 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 1\begin{vmatrix} 23 & 2 \\ 46 & 1 \end{vmatrix} - 20\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 1 & 23 \\ 3 & 46 \end{vmatrix}$$

$$= -69 + 100 - 23 = 8$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 20 \\ 1 & 0 & 23 \\ 3 & 1 & 46 \end{vmatrix}$$

$$= 1\begin{vmatrix} 0 & 23 \\ 1 & 46 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 1 & 23 \\ 3 & 46 \end{vmatrix} + 20\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -23 + 23 + 20 = 20$$

$$\therefore x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{52}{4} = 13$$

$y = \dfrac{\Delta_2}{\Delta} = \dfrac{8}{4} = 2$ மற்றும் $z = \dfrac{\Delta_3}{\Delta} = \dfrac{20}{4} = 5.$

எனவே கொடுக்கப்பட்ட எண்கள் 13, 2 மற்றும் 5.

4. சமன்பாடு தொகுப்பு $x + y + z = 1, x + 2y + 4z = \lambda$, $x + 4y + 10z = \lambda^2$ ஒருங்கமைவுடையது எனில் λ-ன் மதிப்பை காண்க.

தீர்வு : விரிவுபடுத்தப்பட்ட அணி $=[A|B]= \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & \lambda \\ 1 & 4 & 10 & \lambda^2 \end{array}\right]$

$$[A|B] = \xrightarrow[R_3 \to R_3 - R_1]{R_2 \to R_2 - R_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & \lambda - 1 \\ 0 & 3 & 9 & \lambda^2 - 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_3 \to R_3 - 3R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & \lambda - 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda^2 - 1 - 3\lambda + 3 \end{array}\right]$$

$$\to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & \lambda - 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda^2 - 3\lambda + 2 \end{array}\right]$$

இங்கு $\rho(A) = 2$

கொடுக்கப்பட்ட தொகுப்பு ஒருங்கமைவுடையது எனில் $\rho([A|B]) = 2$

$\rho([A|B]) = 2$ மட்டும் எனில் $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$

$\Rightarrow (\lambda - 1)(\lambda - 2) = 0 \Rightarrow \lambda = 1$ அல்லது $\lambda = 2$

$\therefore$ கொடுக்கப்பட்ட தொகுப்பு ஒருங்கமைவு உடையது எனல் λ -ன் மதிப்புகள் 1 மற்றும் 2 மட்டும்.

5. $2x + y + z = a, x - 2y + z = b, x + y - 2z = c$ ஒருங்கமைவுடையது எனில் மட்டும் $a + b + c = 0$ என காட்டுக.

தீர்வு : பிரிவுபடுத்தப்பட்ட அணி $[A|B]$ is $\left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & a \\ 1 & -2 & 1 & b \\ 1 & 1 & -2 & c \end{array}\right]$

$$[A|B] \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & b \\ -2 & 1 & 1 & a \\ 1 & 1 & -2 & c \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[R_3 \to R_3 - R_1]{R_2 \to R_2 + 2R_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & b \\ 0 & -3 & 3 & a + 2b \\ 0 & 3 & -3 & c - b \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_3 \to R_3 + R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & b \\ 0 & -3 & 3 & c + 2b \\ 0 & 0 & 0 & a + b + c \end{array}\right]$$

இங்கு $\rho(A) = 2$

கொடுக்கப்பட்ட தொகுப்பு ஒருங்கமைவுடன் உள்ளது எனில் மட்டும் $\rho([A|B]) = 2$ $\rho([A|B]) = 2$ எனில் மட்டும் $a + b + c = 0$

எனவே நிரூபிக்கப்பட்டது.

6. காஸ்-ஜோர்டன்முறையைபயன்படுத்தி, λ,μ-இன் எம்மதிப்புகளுக்கு $2x-3y+5z=12, 3x+y+\lambda z=\mu$, $x-7y+8z=17$ (i) ஒரே ஒரு தீர்வை பெற்றிருக்கும் (ii) எண்ணிக்கையற்ற தீர்வுகளை பெற்றிருக்கும் (iii) யாதொரு தீர்வும் பெற்றிராது என்பதனை ஆராய்க.

தீர்வு : விரிவுபடுத்தப்பட்ட அணி $[A/B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 5 & 12 \\ 3 & 1 & \lambda & \mu \\ 1 & -7 & 8 & 17 \end{array}\right]$

$$\xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -7 & 8 & 17 \\ 3 & 1 & \lambda & \mu \\ 2 & -3 & 5 & 12 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[R_3 \to R_3 - 2R_1]{R_2 \to R_2 - 3R_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -7 & 8 & 17 \\ 0 & 22 & \lambda - 51 & \mu - 51 \\ 0 & 11 & -11 & -22 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[R_3 \to R_3 \div 11]{R_2 \to R_2 - 2R_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -7 & 8 & 17 \\ 0 & 0 & \lambda - 2 & \mu - 7 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -7 & 8 & 17 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & \lambda - 2 & \mu - 7 \end{array}\right]$$

நிலை (i) $\lambda \neq 2$ எனில்,

$\rho([A|B]) = 3$ மற்றும் $\rho(A) = 3$

$\therefore \rho([A|B]) = \rho(A) = 3 =$ மாறிகளின் எண்ணிக்கை

$\therefore$ ஒரே ஒரு தீர்வை கொண்டிருக்கும்

நிலை (ii) $\lambda = 2$ எனில் $\mu = 7$,

$$[A|B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -7 & 8 & 17 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

இங்கு $\rho(A) = 2$ மற்றும் $\rho([A|B]) = 2$

$\therefore \rho(A) = \rho([A|B]) = 2 <$ மாறிகளின் எண்ணிக்கை

தொகுப்பு ஒருங்கமைவுடன் எண்ணிக்கையற்ற தீர்வுகளை கொண்டிருக்கும்.

நிலை (iii) $\lambda = 2$ மற்றும் $\mu \neq 7$ எனில் மட்டும்

$\rho(A) = 2$ மற்றும் $\rho([A|B]) = 3$

$\therefore \rho(A) \neq \rho([A|B])$

ஆகையால், கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாடுகளின் தொகுப்பு ஒருங்கமைவற்றது.

❀❀❀❀❀